

4 Kosmologie I: Homogene isotrope Weltmodelle

4.1 Einleitung und grundlegende Beobachtungen

Kosmologie ist “besondere” Wissenschaft: es gibt nur *ein* Universum, das wir untersuchen können; keine ‘typischen’ Eigenschaften eines Universums, keine Statistik (vgl. Sterne, Galaxien!).

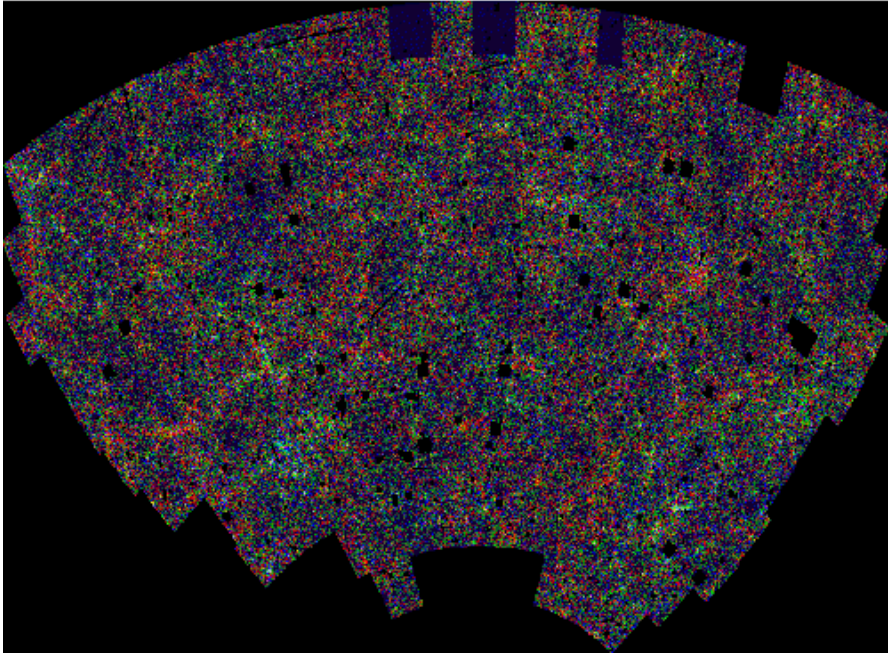


Abbildung 4.1: APM-Survey: Galaxienverteilung in einem ca. 100 mal 50 Grad großen Feld um den Galaktischen Südpol. Die Intensitäten der Pixel sind skaliert auf die Anzahl der Galaxien pro Pixel; blau, grün, und rot stehen für helle, mittlere, und schwache Galaxien (B-Magnituden 18, 19, und 20). Die ‘schwarzen Löcher’ sind nicht untersuchte Gebiete um helle Stern, Kugelsternhaufen, etc.

Kosmologische Beobachtungen sind i.A. schwierig: der ‘größte Teil’ des Universums ist sehr weit weg von uns.

Am wichtigsten: Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes endlich; eine Quelle im Abstand D sehen wir heute in einem Zustand, in dem sie (D/c) jünger war als heute; heutiger Zustand des Universums nur sehr lokal beobachtbar.

Aber: Endlichkeit von c erlaubt, in die Vergangenheit zu schauen!

Beispiel: Euklidischer Raum, ‘wir’ im Zentrum $\mathbf{x} = 0$, heute, $t = t_0$; wir können nur solche Raum-Zeit-Punkte sehen, für die gilt $|\mathbf{x}| = c(t_0 - t)$; ein beliebiger Raum-Zeit-Punkt (\mathbf{x}, t) ist unbeobachtbar.

Wenn unser Universum eine komplexe Raum-Zeit-Struktur hätte, könnten wir diese nicht aus Beobachtungen erschließen, da wir nur Ereignisse auf unserem rückwärtigen Lichtkegel beobachten können.

Zum Glück scheint unser Universum eine im wesentlichen einfache Struktur zu besitzen (s.u.).

4.1.1 Grundlegende kosmologische Beobachtungen

1. Nachts ist der Himmel dunkel.

- Gemittelt über große Winkelskalen sind lichtschwache Galaxien (z.B. solche mit $R > 20$) am Himmel gleichförmig verteilt.
- Bis auf wenige Ausnahmen (z.B. Andromeda=M31) zeigen Spektren von Galaxien Rotverschiebung; je größer Entfernung, umso größer die Rotverschiebung (Hubble Gesetz; siehe Abb. 1.10).
- In fast allen kosmischen Objekten (Gasnebel, Hauptreihensterne) beträgt der Massenanteil von Helium etwa 25 – 30%.

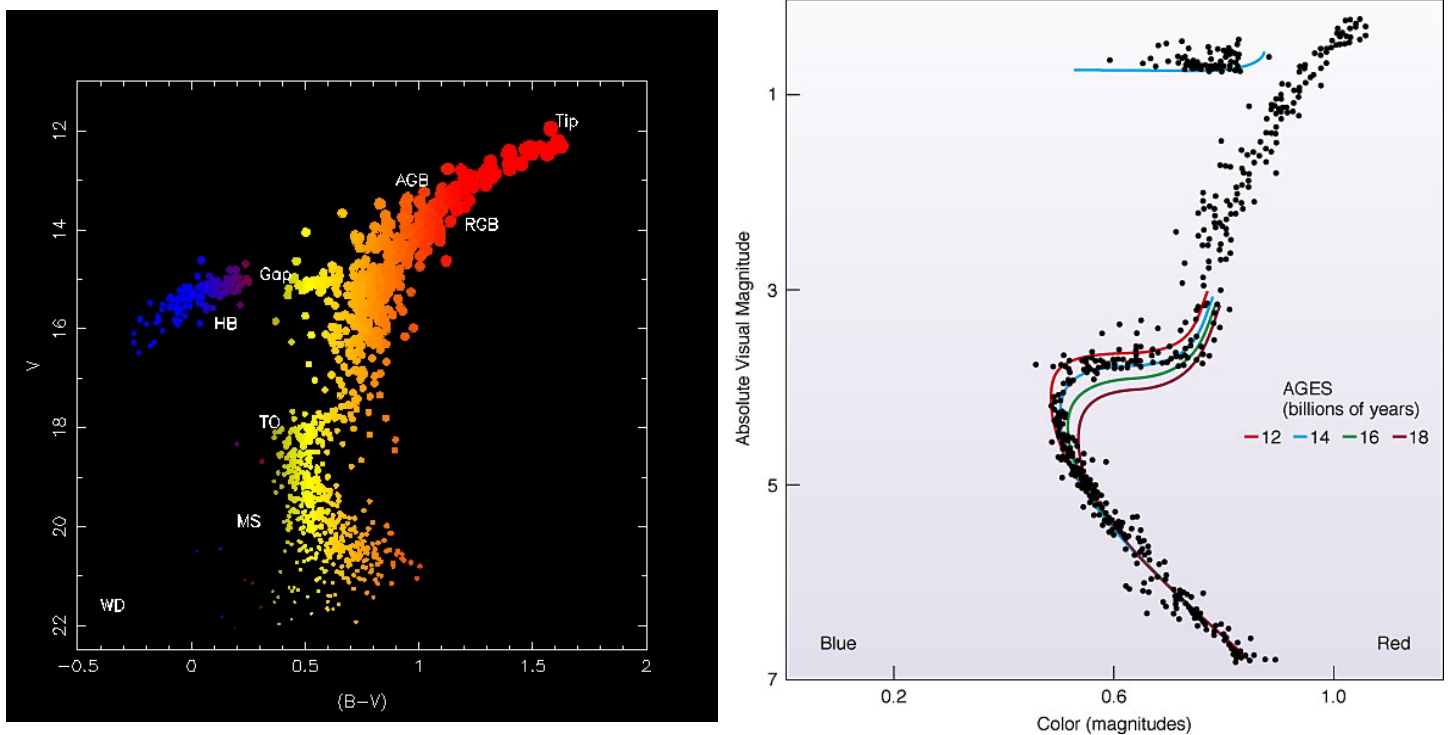


Abbildung 4.2: Farben-Helligkeits-Diagramm der Kugelsternhaufen M5 (links) und 47 Tucanae (rechts). MS: Hauptreihe; TO: turn-off; RGB: Red Giant Branch; Tip: hier passiert der He-Flash; HB: Horizontalast; AGB: Asymptotic Giant Branch; WD: weiße Zwerge, nicht mehr auf dem Diagramm. Dort wo die Hauptreihe aufhört, befinden sich gerade Sterne der Masse, für die das Lebensalter auf der Hauptreihe gleich dem Alter des Kugelsternhaufens ist. Aus der Lage des turn-offs kann man daher das Alter des Sternhaufens bestimmen. Im rechten Bild sind Isochronen (Kurven im HRD von Sternen gleichen Alters) für verschiedene Alterswerte eingezeichnet

- Die ältesten Sternhaufen in unserer Galaxis haben Alter von $\sim 12 \text{ Gyrs} = 12 \times 10^9 \text{ yrs}$ (bestimmt durch Farben-Helligkeits-Diagramm; Zahlenwert nicht unumstritten – Hipparcos hat diesen Wert erst kürzlich revidiert).
- Es gibt Mikrowellenstrahlung (kosmische Hintergrundstrahlung, cosmic microwave background radiation, CMB), die uns aus allen Richtungen erreicht; Anisotropie der CMB $\sim 10^{-5}$ = relativer Unterschied der Intensität aus verschiedenen Richtungen (DMR Experiment auf COBE Satelliten; dabei müssen lokale Effekte 'herausgerechnet' werden, z.B. Strahlung der Milchstraße, Doppler-Effekt – siehe Abb. 1.17).

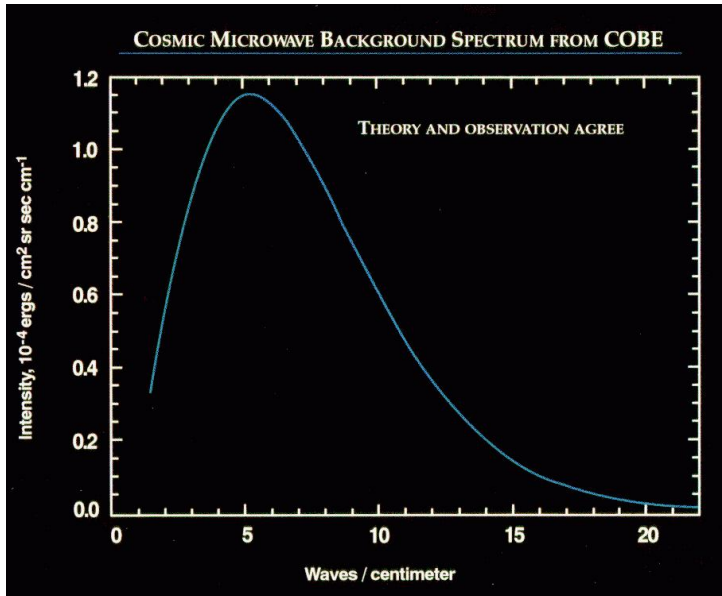


Abbildung 4.3: CMB Spektrum als Intensität gegen Wellen pro Zentimeter. Die durchgezogene Linie zeigt das erwartete Spektrum eines schwarzen Körpers. Die Fehlerbalken der FIRAS Daten sind so klein, dass die Datenpunkte nicht von der theoretischen Kurve unterschieden werden können

7. CMB ist, soweit bisher gemessen, perfekte Schwarzkörperstrahlung, d.h. Planckstrahlung mit $T = 2.728 \pm 0.004$ K (FIRAS Experiment auf COBE).
8. Anzahldichte von Radioquellen bei hoher Galaktischer Breite folgt *nicht* einfachem Gesetz $N(> S) \propto S^{-3/2}$.

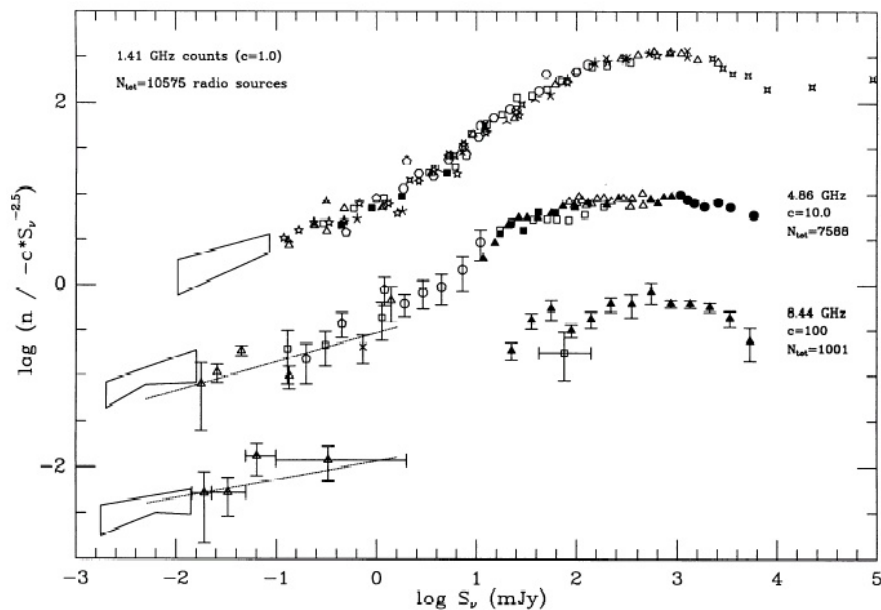


Abbildung 4.4: Zählungen der Radioquellen als Funktion des Flusses, normiert durch die 'Euklidische' Erwartung $n(S) \propto S^{-5/2}$. Ergebnisse sind für drei verschiedene Frequenzen angegeben. Man sieht, dass die Zählungen klar von der Euklidischen Erwartung abweichen (aus Windhorst 1993)

4.1.2 Einfache Schlussfolgerungen

Zunächst Annahme: unendliches, euklidisches, statisches Universum; ergibt Widerspruch zu (1) und (8):

Olbers' Paradoxon: in einem solchen Universum wäre der Himmel nachts hell – sehr hell sogar:

sei n_* mittlere Anzahldichte von Sternen, laut Annahme konstant in Raum und Zeit, R_* ihr mittlerer Radius;

eine Kugelschale mit Radius r und Dicke dr enthält $4\pi r^2 dr n_*$ Sterne, die insgesamt Raumwinkel

$$d\omega = 4\pi r^2 dr n_* \frac{R_*^2 \pi}{r^2} = 4\pi^2 n_* R_*^2 dr$$

einnehmen; insgesamt also

$$\omega = \int_0^\infty dr \frac{d\omega}{dr} = 4\pi^2 n_* R_*^2 \int_0^\infty dr = \infty !$$

Sterne füllen also gesamten Himmel, aus jeder Richtung würde uns Sternlicht erreichen; da spezifische Intensität I_ν Entfernungs-unabhängig, wäre der Himmel $\sim 10^4$ K heiß; glücklicherweise ist er es nicht!

Quellenzählungen: Betrachte Population von Quellen mit räumlich und zeitlich konstanter Leuchtkraftfunktion $n(> L) =$ Anzahldichte von Quellen mit Leuchtkraft größer L ;

in Schale mit Radius r und Dicke dr befinden sich $4\pi r^2 dr n(> L)$ Quellen mit Leuchtkraft $> L$; da $L = S r^2$, ist

$$N(> S) = \int_0^\infty dr 4\pi r^2 n(> S r^2) ;$$

Änderung der Integrationsvariablen auf $L = S r^2$, $r = \sqrt{L/S}$, $dr = dL/(2\sqrt{LS})$:

$$N(> S) = 4\pi \int_0^\infty \frac{dL}{2\sqrt{LS}} \frac{L}{S} N(> L) = 2\pi S^{-3/2} \int_0^\infty dL \sqrt{L} n(> L) :$$

unabhängig von der Leuchtkraftfunktion wären Quellenzählungen in einem solchen Universum $N(> S) \propto S^{-3/2}$, in Widerspruch zu Beobachtungen.

ALSO: eine der Annahmen muss falsch sein!

Hubble Fluss (Rotverschiebung der Galaxien) legt nahe, dass Universum nicht statisch.

Alter von Sternhaufen (5): Universum ist mindestens 12 Gyrs alt; vergleiche *Hubble Zeit* $H_0^{-1} = 10 h^{-1}$ Gyrs – die beiden Zahlen passen gut zueinander.

Galaxienverteilung (2) und CMB Isotropie (6): Auf großen Winkelskalen scheint Universum um uns herum isotrop, mit sehr guter Genauigkeit.

Ist unser Ort im Universum vor anderen ausgezeichnet? Wenn nicht: Universum isotrop um jeden Punkt \rightarrow homogen.

Wichtig: Homogenität kann prinzipiell nicht beobachtet werden: Beobachtungen weitentfernter Gebiete zeigen diese zu früheren Zeiten; Entwicklungseffekte können nicht direkt von räumlichen Variationen getrennt werden.

Allerdings: es gibt keine Hinweise auf Strukturen im Kosmos auf Skalen $\gg 100$ Mpc; vgl. charakteristische Skala des Universums: setze $v = c$ in Hubble Gesetz (1.1),

$$\boxed{R_H := \frac{c}{H_0} = 3000 h^{-1} \text{ Mpc} : \text{ Hubble Länge}} . \quad (4.1)$$

\rightarrow Homogenität scheint zumindest plausibel.

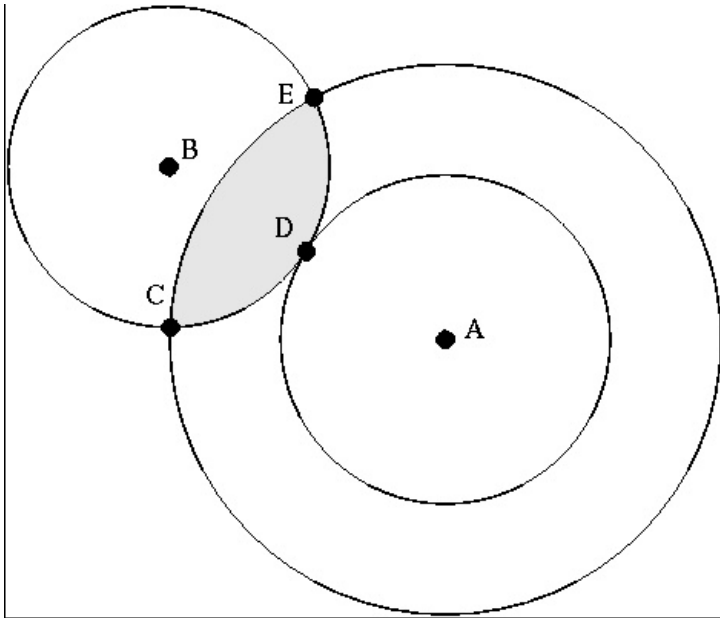


Abbildung 4.5: Aus Isotropie um zwei Punkte folgt Homogenität: ist das Universum um B isotrop, ist die Dichte gleich in C, D, und E. Indem man Schalen mit unterschiedlichen Radien um A konstruiert, wird gezeigt, dass der schraffierte Teil homogen sein muss. Mit Schalen, die groß genug sind, kann man so Homogenität für das ganze Universum folgern.

Kosmologisches Prinzip: *für alle Beobachter (oder von jedem Punkt aus betrachtet) sieht das Universum gleich aus, oder: das Universum ist homogen und isotrop.*

Bemerkungen:

- Wie oben erwähnt: wenn Universum auf großen Skalen komplex wäre, könnten wir nicht auf vollständige Beschreibung hoffen.
- Homogene und isotrope Weltmodelle sind die einfachsten Lösungen der Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART); man kann zumindest untersuchen, wie weit solch einfache Modelle mit den Beobachtungen verträglich sind.
- Wie wir noch sehen werden, folgen aus dem kosmologischen Prinzip die in Abschnitt 4.1.1 erwähnten Beobachtungstatsachen.
- Auf kleinen Skalen ist Universum sicherlich nicht homogen; diese Inhomogenitäten werden als kleinskalige ‘Störungen’ betrachtet (und quantitativ beschrieben).

4.2 Ein expandierendes Universum

Grundlegende Kraft im Universum ist die Gravitation: nur Gravitation und elektromagnetische Kräfte wirken auf großen Längenskalen; da Materie im Kosmos im Mittel neutral, spielen elektromagnetische Kräfte auf großen Skalen keine Rolle.

Theorie der Gravitation: Allgemeine Relativitätstheorie (ART; Einstein 1915); Grenzfall für kleine Gravitationsfelder und kleine Skalen: Newtonsche Gravitationstheorie.

4.2.1 Newtonsche Kosmologie

Motivation: Die Beschreibung mittels der ART ist dann nötig, wenn die betrachteten Skalenlängen mit dem Krümmungsradius der Raumzeit vergleichbar sind. Dies ist in unserem Universum sicherlich der Fall.

Andererseits: In einem *homogenen* Universum ist jedes kleine Raumgebiet charakteristisch für das ganze Universum, und auf kleinen Skalen ist die Newtonsche Betrachtung gerechtfertigt.

Also: ausgehend vom kosmologischen Prinzip, betrachte räumlich homogene und isotrope Weltmodelle, zunächst im Rahmen der Newtonschen Mechanik.

4.2.2 Kinematische Beschreibung

Mitbewegte Koordinaten. Betrachte homogene Kugel der Dichte $\rho(t)$; erlaube radiale Expansion (oder Kontraktion) der Kugel, so dass ρ räumlich homogen bleibt; wähle einen Zeitpunkt $t = t_0$ und führe zu diesem Zeitpunkt räumliches Koordinatensystem \mathbf{x} ein, mit Ursprung im Mittelpunkt der Kugel; ein Teilchen der Kugel mit Ort \mathbf{x} zur Zeit t_0 habe zu einem anderen Zeitpunkt t Koordinate $\mathbf{r}(t)$; radiale Expansion

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{r}(t) = a(t) \mathbf{x}}. \quad (4.2)$$

$a(t)$ kann nur von t abhängen: wegen radialer Expansion könnte a im Prinzip auch Funktion von $|\mathbf{x}|$ sei, aber Erhaltung der Homogenität von ρ impliziert $a = a(t)$; $a(t)$ heißt *kosmischer Skalenfaktor*; weil $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}$,

$$\boxed{a(t_0) = 1}. \quad (4.3)$$

Wir wählen $t_0 = \text{heute}$.

Teilchen (oder Beobachter), die sich entsprechend (4.2) bewegen, heißen *mitbewegte Beobachter* (comoving observers); \mathbf{x} ist mitbewegte (comoving) Koordinate. Die Weltlinie (\mathbf{r}, t) jedes mitbewegten Beobachters ist durch \mathbf{x} eindeutig gegeben.

Expansionsrate. Geschwindigkeit eines Teilchens:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \frac{da}{dt} \mathbf{x} \equiv \dot{a} \mathbf{x} = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{r} \equiv H(t) \mathbf{r}, \quad (4.4)$$

mit

$$\boxed{H(t) := \frac{\dot{a}}{a} : \text{Expansionsrate}}. \quad (4.5)$$

Relativgeschwindigkeit zweier Teilchen bei \mathbf{r} und $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = H(t) \Delta\mathbf{r} : \quad (4.6)$$

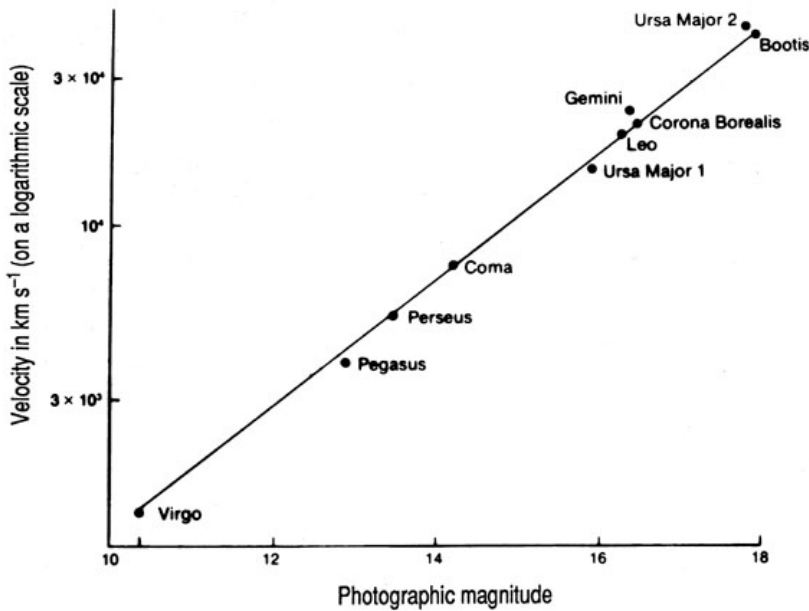


Abbildung 4.6: Hubble-Diagramm: für mehrere Galaxienhaufen ist die ‘Fluchtgeschwindigkeit’ (gemessen aus Rotverschiebung) als Funktion der Helligkeit der fünfthellsten Haufengalaxie dargestellt; die sich ergebende Gerade ist das lokale Hubble Gesetz, wenn man diese Helligkeit als Maß der Entfernung der Haufen annimmt: wenn diese Galaxien in etwa gleich leuchtkräftig wären, wäre Fluss $S \propto D^{-2}$, also $v \propto D \propto S^{-1/2}$

jeder Beobachter, der mit der Kugel expandiert, sieht um sich herum isotropes Geschwindigkeitsfeld, entsprechend dem Hubble Gesetz;
für $t = t_0 =$ heute spezialisiert sich (4.6) auf (1.1);
Expansion $\leftrightarrow H(t) > 0$;
Hubble Konstante $H_0 \equiv H(t_0)$: Expansionsrate heute.

4.2.3 Dynamik der Expansion

Betrachte Kugelschale mit Radius x zur Zeit t_0 , und Radius $r(t) = a(t)x$ für beliebiges t ; Masse innerhalb der Kugel:

$$M(x) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 x^3 = \frac{4\pi}{3} \rho(t) r^3(t) = \frac{4\pi}{3} \rho(t) a^3(t) x^3 ; \quad (4.7)$$

ρ_0 : Massendichte des Universums heute; Dichte nimmt ab wie

$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t) : \text{Massenerhaltung} ;} \quad (4.8)$$

Gravitationsbeschleunigung eines Teilchens auf dieser Kugelschale: $GM(x)/r^2$, nach innen gerichtet \rightarrow Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r}(t) \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G M(x)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0 x^3}{r^2} , \quad (4.9)$$

oder

$$\boxed{\ddot{a}(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{x} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^2(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) a(t)} , \quad (4.10)$$

unabhängig von x ! Dynamik der Expansion allein bestimmt von der Materiedichte.

‘Energieerhaltung’: Multipliziere (4.10) mit $2\dot{a}$ und integriere:

$$\boxed{\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{a} - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2(t) - Kc^2} ; \quad (4.11)$$

Kc^2 : Integrationskonstante, wird später interpretiert;
 nach Multiplikation mit $x^2/2$ kann (4.11) geschrieben werden als

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{GM}{r(t)} = -Kc^2 \quad ;$$

kinetische + potentielle Energie (pro Masse) eines Teilchens ist eine Konstante; daher ist (4.11) Energieerhaltungsgleichung;

K ist proportional zur Gesamtenergie eines mitbewegten Teilchens; daher ist Geschichte der Expansion von K abhängig:

- Wenn $K < 0$, so ist rechte Seite von (4.11) immer positiv, da $da/dt > 0$ heute, bleibt $da/dt > 0$ für alle Zeiten, das Universum expandiert ewig.
- Wenn $K = 0$, so ist rechte Seite von (4.11) immer positiv, $da/dt > 0$ für alle Zeiten, das Universum expandiert ewig, aber so, dass $da/dt \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$
- Wenn $K > 0$, so wird rechte Seite von (4.11) 0 wenn $a = a_{\max} = (8\pi G\rho_0)/(3Kc^2)$, dort ist $da/dt = 0$, danach rekollabiert das Universum wieder.

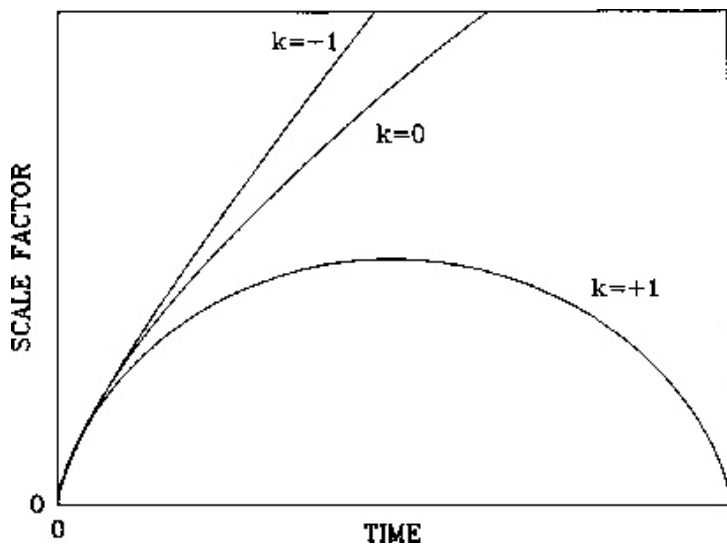


Abbildung 4.7: Das Verhalten des Skalenfaktors $a(t)$ für die drei möglichen Fälle von K ; k gibt das Vorzeichen von K an

Im Spezialfall $K = 0$ hat das Universum heute eine Dichte, die *kritische Dichte* genannt wird,

$$\rho_{\text{cr}} := \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} \text{ h}^2 \text{ g/cm}^3 \quad . \quad (4.12)$$

Man definiert den *Dichteparameter*

$$\Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_{\text{cr}}} \quad ; \quad (4.13)$$

$K > 0$ entspricht $\Omega_0 > 1$, $K < 0$ entspricht $\Omega_0 < 1$. Die in Sternen sichtbare Materie trägt nur wenig bei, $\Omega_* \lesssim 0.01$.

Aber: wie schon bei Rotationskurven von Spiralen gesehen, gibt es klare Hinweise auf Dunkle Materie; diese kann Ω_0 dominieren.

4.2.4 Modifikation durch ART

Newtonsche Betrachtungsweise enthält wesentliche Aspekte der homogenen und isotropen Weltmodelle; muss allerdings mit Vorsicht interpretiert werden:

Es gibt keinen Mittelpunkt des Universums; das Universum expandiert nicht von einem ausgezeichneten Punkt weg!

Bemerke: das Bild der "Kugel" taucht in den Expansionsgleichungen (4.10) und (4.11) nicht mehr auf!

Die ART modifiziert Newtonsche Theorie in mehrerer Hinsicht:

- Materie mit Druck modifiziert die Bewegungsgleichungen;
- die Einsteinsche Feldgleichung der ART enthält zusätzlichen Term, die kosmologische Konstante;
- Interpretation der Expansion wird völlig geändert: nicht die Teilchen (oder Beobachter) expandieren voneinander weg, sondern der Raum selbst expandiert; insbesondere ist die Rotverschiebung keine Doppler-Rotverschiebung, sondern selbst eine Eigenschaft expandierender Raum-Zeiten.
Allerdings: lokal kann man sich die Rotverschiebung immer noch als Doppler-Effekt vorstellen, ohne einen großen Fehler zu machen.

Materie mit Druck: Ohne Druck gilt $\rho(t) a^3(t) = \text{const.}$; falls Materie Druck besitzt, gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} (c^2 \rho a^3) = -P \frac{da^3}{dt}}; \quad (4.14)$$

Interpretation: ρc^2 : Energiedichte = Materiedichte $\times c^2$; $a^3 \propto$ Volumen, also: Änderung der Energie = - Druck \times Volumenänderung; vgl. Erster Hauptsatz der Thermodynamik!

Druck modifiziert die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) a; \quad (4.15)$$

Druck wirkt also als zusätzliche Quelle der Gravitation.

Kosmologische Konstante: Einsteinsche Feldgleichungen erlauben zusätzlichen Term in den Expansionsgleichungen, die sog. (orts- und zeitunabhängige) *Kosmologische Konstante* Λ :

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}}, \quad (4.16)$$

und

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}}; \quad (4.17)$$

sie wurde ursprünglich von Einstein eingeführt, um ein statisches kosmologisches Modell zu erhalten [durch geeignete Wahl von Λ und ρ kann man die rechte Seiten der Gl.(4.16) und (4.17) zu 0 setzen] – damals war die Hubble Expansion noch nicht bekannt; wurde lange Zeit ignoriert (Einstein: “Meine größte Dummheit”, nachdem Hubble Expansion bekannt wurde);

heutzutage wird ein mögliches $\Lambda \neq 0$ interpretiert als “Energiedichte des Vakuums”, ein quantenmechanisches Phänomen – allerdings läßt sich Λ mittels der Quantenmechanik momentan nicht berechnen; Abschätzungen der Größenordnung liegen um etwa 120 Zehnerpotenzen (!!!) daneben.

Gleichung (4.16) legt nahe, die Größe

$$\boxed{c^2 \rho_\Lambda := \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}} \quad (4.18)$$

als Energiedichte des Vakuums zu interpretieren.

Man unterscheidet im Wesentlichen folgende Arten von Materie:

- *Staub*: Materie ohne Druck, $P = 0$; nicht zu verwechseln mit dem Staub als absorbierender Bestandteil des ISM; thermische Bewegung der Materieteilchen $\ll c$;
- *Strahlung*: Materie mit Druck $P = \rho c^2/3$, thermische Bewegung der Teilchen ist (ultra-)relativistisch; z.B. Photonen;
- *Vakuum*, oder die kosmologische Konstante.

Entsprechend schreibt man $\rho_d(t)$ für Staub, $\rho_r(t)$ für Strahlung; ebenfalls entsprechende Dichteparameter

$$\boxed{\Omega_{d,0} = \frac{\rho_{d,0}}{\rho_{cr}} ; \quad \Omega_{r,0} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{cr}} ; \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}} \quad (4.19)$$

Staub: sämtliche nichtrelativistische Materie, also die baryonische Materie und die Dunkle Materie;

Heute: die Materiedichte von Galaxien (inklusive ihrer dunklen Halos) entspricht $\Omega_{d,0} \gtrsim 0.02$ (abhängig von der – weitestgehend unbekannt – Ausdehnung der dunklen Halos): dies ist untere Schranke für Ω_0 ; später wird gezeigt, dass $\Omega_0 \sim 0.3$;

dagegen Energiedichte der Strahlung heute sehr viel kleiner; wird dominiert durch Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung und Neutrinos aus dem frühen Universum (s.u.),

$$\boxed{\Omega_{r,0} \sim 4.2 \times 10^{-5} h^{-2}} ; \quad (4.20)$$

also: $\Omega_0 = \Omega_{d,0} + \Omega_{r,0} \approx \Omega_{d,0}$.

4.2.5 Expansionsgleichungen und Notwendigkeit eines Big Bang

Verhältnis von Strahlung und Staub ändert sich mit Skalenfaktor:
während $\rho_d(t) = \rho_{d,0} a^{-3}(t)$, folgt aus (4.14)

$$\boxed{\rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}(t)}, \quad (4.21)$$

so dass

$$\frac{\rho_r(t)}{\rho_d(t)} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{d,0}} \frac{1}{a(t)} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{d,0}} \frac{1}{a(t)}; \quad (4.22)$$

Strahlung und Staub hatten also gleiche Energiedichte bei Skalenfaktor

$$\boxed{a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{d,0}} = 4.2 \times 10^{-5} \Omega_0^{-1} h^{-2}}. \quad (4.23)$$

Mit $\rho = \rho_{d,0} a^{-3} + \rho_{r,0} a^{-4}$ und (4.19) kann man die Expansionsgleichung (4.16) schreiben als

$$H^2(t) = H_0^2 \left[a^{-4}(t) \Omega_{r,0} + a^{-3}(t) \Omega_0 - a^{-2}(t) \frac{K c^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (4.24)$$

Spezialisierung auf heute, und die Bedingung $\Omega_{r,0} \ll \Omega_0$ liefert dann

$$\boxed{K = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1)}, \quad (4.25)$$

K hat Dimension (Länge)⁻²; im Rahmen der ART wird K interpretiert als Krümmung des Universums (zum heutigen Zeitpunkt); genauer:

der homogene, isotrope drei-dimensionale Raum zur Zeit t_0 hat Krümmung K :

- falls $K = 0$, Raum ist euklidisch, flach;
- falls $K > 0$, kann $1/\sqrt{K}$ interpretiert werden als Krümmungsradius eines sphärischen Raumes – das zwei-dimensionale Analogon wäre eine Kugeloberfläche;
- falls $K < 0$, nennt man den Raum hyperbolisch – das zwei-dimensionale Analogon wäre dann die Oberfläche eines Sattels.

Bemerkung: Einsteinsche Feldgleichung sagt etwas über Raumkrümmung aus, nicht aber über Topologie des Universum;

eine Zylinderoberfläche ist ebenfalls ‘flacher Raum’ wie Ebene, besitzt aber eine andere Topologie;

falls Universum ‘einfache Topologie’, dann:

für $K > 0$, Universum endlich, für $K \leq 0$ unendlich;

in allen Fällen aber unbegrenzt (eine Kugeloberfläche ist endlich aber unbegrenzter Raum).

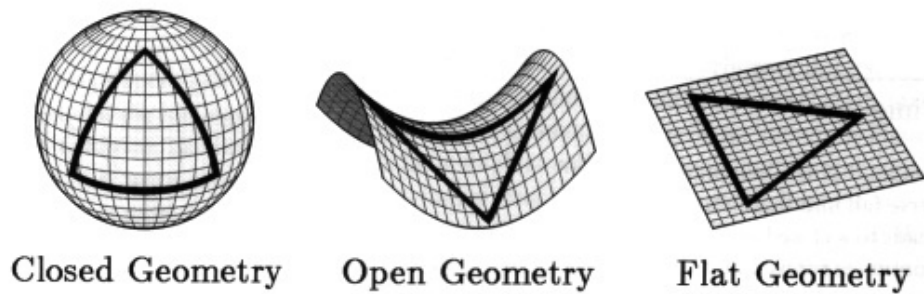


Abbildung 4.8: Zwei-dimensionale Analoga zu den drei möglichen Raumkrümmungen. In einem geschlossenen Universum ist die Winkelsumme im Dreieck größer als 180° ; in einem offenen Universum kleiner als 180° ; und in einem flachen Universum gleich 180° .

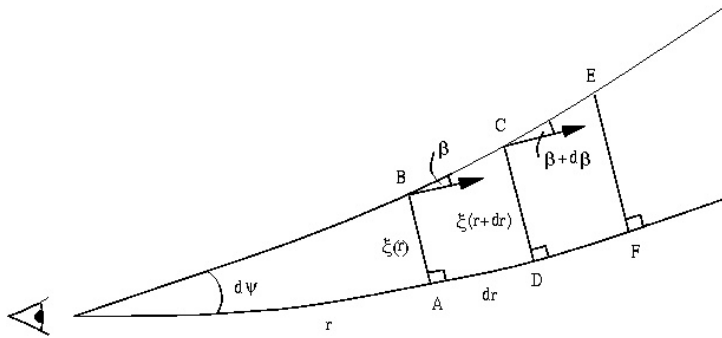


Abbildung 4.9: Die Geometrie zweier Lichtstrahlen in gekrümmter Raum-Zeit. Der Winkel zwischen ihnen ist $d\Psi$, der transversale Abstand ξ . Ein Test für Krümmung ist, einen Vektor, der einen Winkel β mit einem der Strahlen macht, um das Viereck BADC zu verschieben; ändert sich daraufhin der Winkel um $d\beta$, ist $d\beta$ ein Maß für die Krümmung.

Mit (4.24) und (4.25) erhält man Expansionsgleichung,

$$\boxed{H^2(t) = H_0^2 [a^{-4}(t)\Omega_{r,0} + a^{-3}(t)\Omega_0 + a^{-2}(t)(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda]} \quad (4.26)$$

Diskussion der Expansionsgleichung. Die Terme auf rechter Seite von (4.26) haben unterschiedliche Abhängigkeit von a :

- für sehr kleine a dominiert erster Term, das Universum ist strahlungsdominiert;
- für etwas größeres a dominiert der zweite Term, der Staub- (oder Materie-)Term;
- falls $K \neq 0$ wird für größere a der dritte Term dominieren, der Krümmungsterm;
- für sehr große a dominiert die kosmologische Konstante.

Heute ist $\dot{a} > 0$: Expansion;

(4.26) besagt, dass $\dot{a} > 0$ für alle t , es sei denn, die rechte Seite von (4.26) verschwindet für einen Wert von a .

Falls $H^2 = 0$ für ein $a > 1$, kommt Expansion zum Stillstand, für spätere Zeiten rekollabiert das Universum.

Falls $H^2 = 0$ für ein $a < 1$, hat Universum vorher kollabiert, danach Expansion.

Welche dieser Möglichkeiten realisiert ist, hängt von den kosmologischen Parametern ab; man findet:

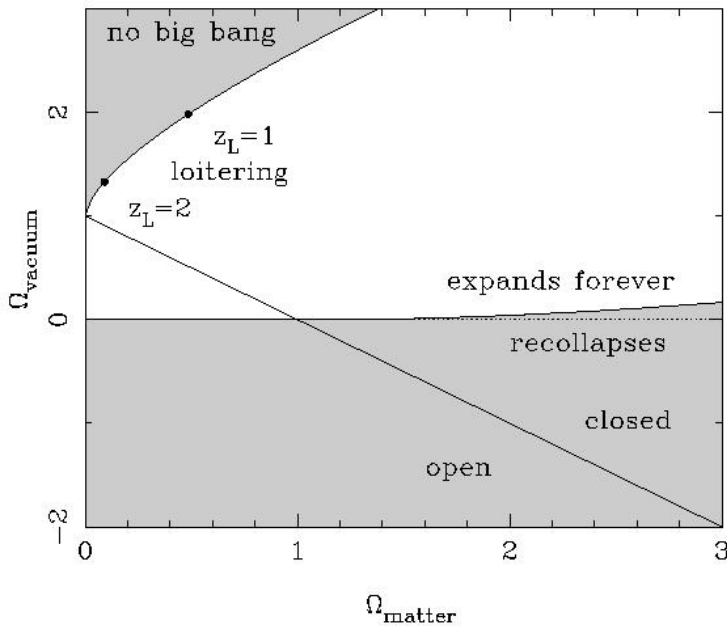


Abbildung 4.10: Klassifikation der kosmologischen Modelle. Die Gerade verbindet Modelle ohne Raumkrümmung ($\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$), die offene und geschlossene Modelle trennt. Die beinahe horizontale Kurve trennt Modelle, die ewig expandieren, von solchen, die in ferner Zukunft rekollabieren. Modelle in der oberen linken Ecke haben Expansionsgeschichte, bei der a nie nahe 0 war, also keinen Big Bang hatten; bei solchen Modellen gibt es eine maximale Rotverschiebung von Quellen, für zwei Fälle angedeutet. Da $\Omega_0 > 0.1$ ist, und wir Quellen mit Rotverschiebungen > 5 beobachtet haben, sind diese Modelle auszuschließen.

- Falls $\Lambda = 0$, so ist $H^2 > 0$ für alle $a \leq 1$; das Verhalten für $a > 1$ hängt von Ω_0 ab:
 - $H^2 > 0$ für alle a , falls $\Omega_0 \leq 1$ (bzw. $K \leq 0$): das Universum expandiert für alle Zeiten.
 - Falls $\Omega_0 > 1$ ($K > 0$), so verschwindet H^2 für $a = a_{\text{max}} = \Omega_0 / (\Omega_0 - 1)$; Universum erreicht dann maximale Expansion bei a_{max} , danach rekollabiert es wieder.
- Falls $\Lambda > 0$, ist Diskussion etwas komplizierter:
 - Falls $\Omega_0 < 1$, expandiert Universum für alle $a > 1$;
 - falls $\Omega_0 > 1$, hängt Zukunft von Ω_Λ ab: falls Ω_Λ klein genug, kommt es zur Rekollabierung, sonst ewige Expansion;
 - falls $\Omega_\Lambda < 1$, ist $H^2 > 0$ für alle $a \leq 1$;
 - falls $\Omega_\Lambda > 1$, ist es im Prinzip möglich, dass $H^2 = 0$ für ein $a < 1$; solche Modelle können aber durch Beobachtungen ausgeschlossen werden (s.u.).

Bis auf den letzten Fall, der ausgeschlossen werden kann, kommen wir also zu folgendem Ergebnis:

*Die Expansionsgleichung besagt, dass es einen Zeitpunkt gegeben haben muss, wo $a = 0$, die 'Größe des Universums' also verschwindend klein gewesen sein muss. Für $a \rightarrow 0$ divergiert die Materiedichte; dieser Zustand muss also singuläre Dichte besitzen. Den Zeitpunkt mit $a = 0$, und die Entwicklung aus diesem Zustand, nennt man **Urknall** oder **Big Bang**.*

Den Zeitpunkt, bei dem $a = 0$, wählt man zweckmäßigerweise als Ursprung der Zeit, so dass t Weltalter ist.

Wie noch gezeigt wird, sind die Vorhersagen des Big Bang Modells in beeindruckender Weise mit den Beobachtungen in Übereinstimmung!

Man definiert den *Abbremsungsparameter*

$$q_0 := -\ddot{a} a / \dot{a}^2, \quad (4.27)$$

wobei rechte Seite bei $t = t_0$ zu berechnen ist; mit (4.17) und (4.26) folgt

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_\Lambda : \quad (4.28)$$

für genügend großes Ω_Λ kann der Abbremsungsparameter negativ werden \rightarrow Expansion des Universums beschleunigt sich.

Es gibt Hinweise (durch Beobachtungen entfernter Supernovae), dass in der Tat $q_0 < 0$, Expansion also beschleunigt ist.

Weltalter: Das Weltalter bei einem gegebenen Skalenfaktor a folgt aus $dt = da(da/dt)^{-1} = da/(aH)$:

$$t(a) = \frac{1}{H_0} \int_0^a da [a^{-1}\Omega_0 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + a^2\Omega_\Lambda]^{-1/2}; \quad (4.29)$$

dabei wurde Druck vernachlässigt – Druckterm nur relevant für sehr kleine a , daher nur für sehr kleinen Bruchteil der kosmischen Zeit; heutiges Weltalter t_0 : setze $a = 1$ in (4.29); es ist für ‘flache’ Modelle und solche mit $\Lambda = 0$ in Fig.4.11 dargestellt.

Kosmologische Modelle charakterisiert durch Ω_0 und Ω_Λ ; H_0 ist ‘nur’ Skalenfaktor. Heute werden hauptsächlich zwei Sorten von Modellen betrachtet:

- Modelle ohne kosmologische Konstante, $\Lambda = 0$; die Schwierigkeit, einen ‘vernünftigen’ Wert für Λ aus der Teilchenphysik zu begründen, ist für viele Grund genug, diese Einschränkung zu machen;
- Modelle, für die $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$, d.h. $K = 0$; diese Modelle werden von sog. Inflationären Modellen bevorzugt;
- Ein Spezialfall ist das Einstein-de Sitter Modell, $\Omega_0 = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$; für dieses ist $t_0 = 2/(3H_0) \approx 6.7 h^{-1} \times 10^9$ yrs.
- Für viele Weltmodelle ist t_0 größer als Alter der ältesten Sternhaufen und daher kompatibel mit deren Altersbestimmung; allerdings ist das Einstein-de Sitter Modell nur dann mit Sternalter verträglich, wenn H_0 klein.

Kosmologische Parameter nicht genau bekannt; die z.Zt. bevorzugten Werte sind etwa

$$\boxed{\Omega_0 \sim 0.3; \quad \Omega_\Lambda \sim 0.7; \quad h \sim 0.7}. \quad (4.30)$$

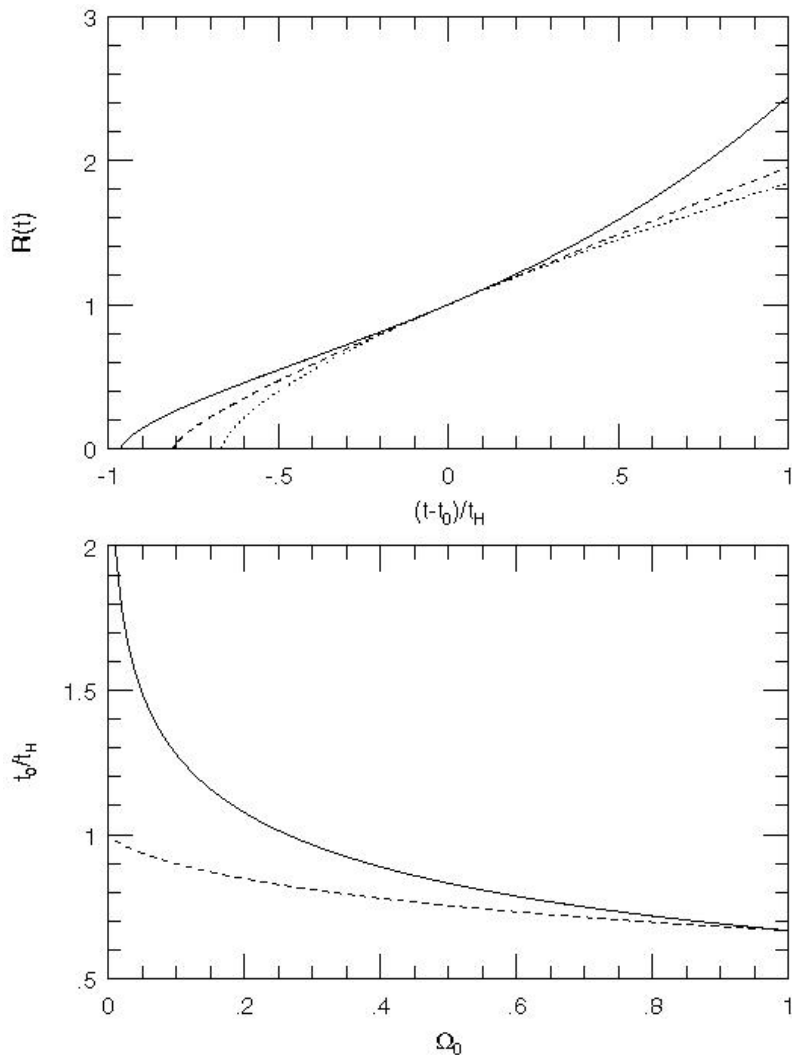


Abbildung 4.11: Oben: Skalenfaktor $a(t)$ als Funktion der kosmischen Zeit, hier skaliert als $(t-t_0)H_0^{-1}$, für ein Einstein-de Sitter Modell ($\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0$; gepunktete Kurve), ein offenes Universum ($\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$; gestrichelte Kurve), und ein flaches Universum kleiner Dichte ($\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$; durchgezogene Kurve) Unten: Weltalter in Einheiten der Hubble Zeit H_0^{-1} für flache Weltmodelle mit $K = 0$ ($\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$, durchgezogene Kurve) und solche mit verschwindender kosmologischer Konstanten (gestrichelter Kurve); man sieht, dass für flache Universen mit kleinem Ω_0 (also großem $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_0$) t_0 wesentlich größer als H_0^{-1} sein kann

4.2.6 Rotverschiebung

Frage: in welchem Zusammenhang stehen t und a mit beobachtbaren Größen?

Antwort: Die kosmologische Rotverschiebung ist eine einfache Funktion des Skalenfaktors,

$$(1 + z) = \frac{1}{a}; \tag{4.31}$$

diese Relation folgt aus der Betrachtung von Lichtstrahlen in der ART; man kann sie aber auf andere Art plausibel machen.

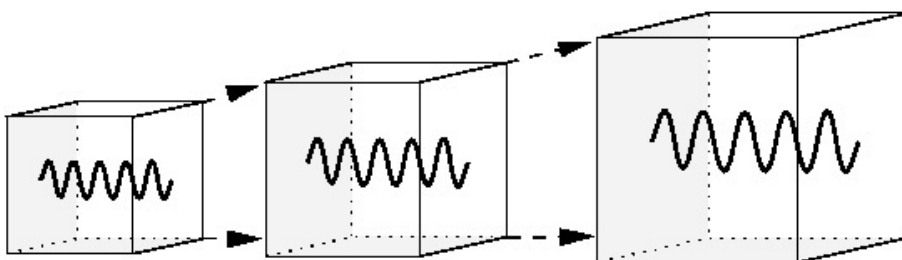


Abbildung 4.12: Wellenlängen des Lichts dehnen sich mit dem Universum aus.

Lokales Hubble Gesetz: Für nahe Quellen gilt das Hubble Gesetz: aus (4.6) und $v \approx zc$ folgt

$$\boxed{z = \frac{H_0}{c} D \approx \frac{h D}{3000 \text{ Mpc}} \text{ für } z \ll 1}, \quad (4.32)$$

wobei D : Entfernung einer Quelle mit Rotverschiebung z .

Für $z \ll 1$, also $1 - a \ll 1$, gilt:

$$1 - a = a(t_0) - a(t) \approx \dot{a}(t_0) (t_0 - t) = H_0 (t_0 - t) = z;$$

letzter Schritt folgt aus (4.32) mit $(t_0 - t) = D/c$;

andererseits ist für $1 - a \ll 1$: $1/a - 1 \approx 1 - a$, so dass lokales Hubble Gesetz mit (4.31) kompatibel ist.

Energiedichte in Strahlung: Anzahldichte n von Photonen nimmt wegen Expansion wie $n \propto a^{-3}$ ab, zusätzlich nimmt Energie pro Photon ab wie (h_P : Plancksches Strahlungsquantum)

$$E_\gamma = h_P \nu \propto \frac{1}{a};$$

da

$$\boxed{\frac{\nu(a)}{\nu(1)} = \frac{\lambda(1)}{\lambda(a)} = 1 + z = \frac{1}{a}}.$$

Zusammengenommen: Energiedichte der Strahlung $= n E_\gamma \propto a^{-4}$; (4.31) ist also kompatibel mit (4.21).

Oder umgekehrt: aus $n \propto a^{-3}$ und (4.21) folgt $\nu \propto 1/a$.

CMB: Ganz allgemein kann man zeigen: spezifische Intensität I_ν verändert sich durch Rotverschiebung wie:

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I'_{\nu'}}{(\nu')^3}; \quad (4.33)$$

dabei ist I_ν spezifische Intensität heute bei Frequenz ν , und $I'_{\nu'}$ spezifische Intensität bei Rotverschiebung z bei Frequenz $\nu' = (1 + z)\nu$. Insbesondere folgt daraus, dass ein Planck-Spektrum bei der Expansion ein Planck-Spektrum bleibt, mit sich verändernder Temperatur

$$\boxed{T(z) = T_0 (1 + z) = \frac{T_0}{a}}. \quad (4.34)$$

Unser Universum war früher also heißer als heute. Da für ein Planck-Spektrum gilt:

$$\boxed{\rho_r = a_{\text{SB}} T^4 =: \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4}, \quad (4.35)$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit (4.21); hier, $\hbar = h_P/(2\pi)$, und k_B : Boltzmann Konstante.

Mit (4.31) lassen sich alle Relationen sowohl als Funktion von a , als auch von z schreiben, z.B. Weltalter, durch Ersetzung oberer Integrationschranke, $a \rightarrow (1 + z)^{-1}$, in (4.29).

4.2.7 Kosmische Entfernungen

Je weiter eine Quelle von uns weg, umso länger braucht das Licht, umso früher wurde es emittiert, umso kleiner ist a , umso größer ist z :

→ Rotverschiebung ist ein geeignetes Maß für Entfernung von Quellen, insbesondere, weil z beobachtbar ist.

Wie steht z mit anderen Entfernungen in Beziehung? Oder: was ist Entfernung einer Quelle in Mpc? Die Antwort darauf ist komplizierter, als Frage suggeriert:

In *euklidischen Räumen* ist die Entfernung zwischen zwei Punkten eindeutig definiert; es gibt mehrere “Messvorschriften”, diese Entfernungen zu bestimmen; zwei Beispiele:

- Falls Quelle kreisförmig, mit Radius R , so nimmt diesen den Raumwinkel

$$\omega = \frac{R^2 \pi}{D^2} \quad (4.36)$$

ein; kennt man also R , kann man D mittels (4.36) messen.

- Falls Quelle Leuchtkraft L besitzt, ist beobachteter Fluss

$$S = \frac{L}{4\pi D^2}; \quad (4.37)$$

kennt man L , lässt sich daraus Entfernung D bestimmen.

Beide Messmethoden ergeben den gleichen Wert für D . Aber:

In gekrümmten Raum-Zeiten ergeben verschiedene Messvorschriften verschiedene Werte für ‘die Entfernung’; es gibt also verschiedene Entfernungsdefinitionen.

Das mag zunächst überraschen, aber: die beiden oben genannten Messvorschriften für D sind so definiert worden, dass sie in *euklidischen* Räumen den gleichen Wert ergeben – es gibt daher keinen Grund, warum sie in anderen Räumen ebenfalls übereinstimmen sollten!

Die wichtigsten Entfernungsdefinitionen sind:

- *Mitbewegte Entfernung (comoving distance)*: Weltlinie einer Quelle mit Rotverschiebung z ist charakterisiert durch räumliche Koordinate heute, also durch die mitbewegte Koordinate \mathbf{x} relativ zu uns bei $\mathbf{x} = 0$; man definiert

$$D_{\text{com}}(z) = |\mathbf{x}| \quad (4.38)$$

als mitbewegte Entfernung. Diese ist nicht direkt mit Beobachtungen verknüpft.

- *Winkelentfernung (angular diameter distance)*: Wie oben betrachte Quelle mit Radius R , beobachtet unter Raumwinkel ω ; dann definiert man Winkelentfernung

$$D_A(z) = \sqrt{\frac{R^2 \pi}{\omega}}. \quad (4.39)$$

- *Leuchtkraftentfernung (luminosity distance)*: Betrachte Quelle mit Leuchtkraft L und Fluss S ; definiere Leuchtkraftentfernung

$$D_L(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}. \quad (4.40)$$

Alle diese Entfernungen stimmen lokal (für $z \ll 1$) überein und sind *eindeutige* Funktionen der Rotverschiebung; z.B. für die Winkelentfernung für $\Omega_\Lambda = 0$ und $z \ll z_{\text{eq}} = 1/a_{\text{eq}} - 1$ [die Mattig (1958) Relation]

$$D_A(z) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_0^2 (1+z)^2} \left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) (\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1) \right]; \quad (4.41)$$

insbesondere ist D_A nicht notwendigerweise eine monotone Funktion von z (vgl. Winkelentfernungen auf einer Kugel).

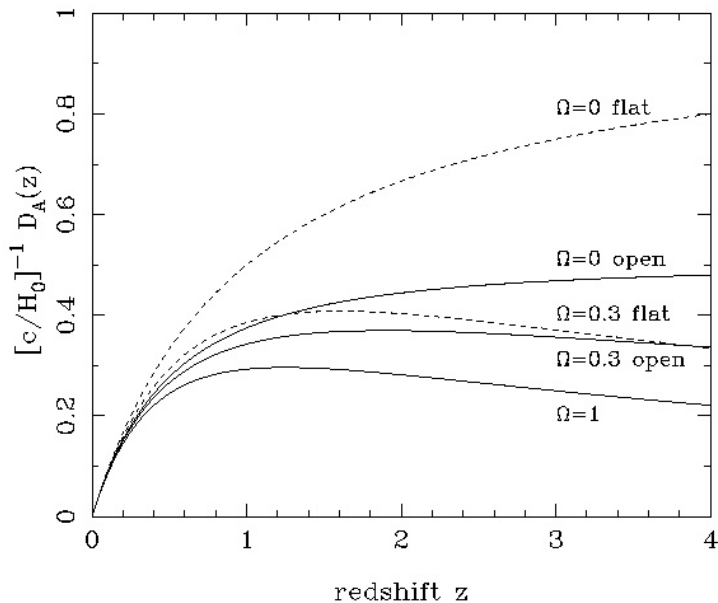


Abbildung 4.13: Winkelentfernung gegen Rotverschiebung für verschiedene Kosmologien. Durchgezogene Kurven zeigen Modelle ohne Vakuumenergie; gestrichelte Kurven zeigen flache Modelle mit $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$. Für beide Fälle werden Resultate für $\Omega_0 = 1, 0.3$, und 0 gezeigt.

Ganz allgemein gilt:

$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z). \quad (4.42)$$

Aufgrund der Definition der Winkelentfernung (Länge/Winkeldurchmesser) sind dies die relevanten Entfernungen, die in der Gravitationslinsengleichung (3.47) auftauchen.

4.2.8 Zusammenfassung

Nach diesem etwas längeren Abschnitt sollen die wichtigsten Punkte nochmal erwähnt werden:

- Beobachtungen sind verträglich damit, dass unser Universum auf großen Skalen um uns herum isotrop und homogen ist;
- das kosmologische Prinzip postuliert die Homogenität und Isotropie des Universums;
- die ART erlaubt homogene und isotrope Weltmodelle; in ihrer Sprache liest sich das kosmologische Prinzip so:
- es gibt eine Familie von Lösungen der Einsteinschen Feldgleichung, so dass eine Schar von mitbewegten Beobachtern die gleiche Geschichte des Universums sehen; für jeden von diesen ist das Universum isotrop.
- Die *Form* dieser Friedmann–Lemaître Weltmodelle ist charakterisiert durch den Dichteparameter Ω_0 und die kosmologische Konstante Ω_Λ , die *Größe* durch die Hubble Konstante H_0 . Die kosmologischen Parameter bestimmen die Expansionsrate des Universums als Funktion der Zeit.
- Der Skalenfaktor $a(t)$ des Universums ist eine bis heute monoton ansteigende Funktion; das Universum war früher kleiner, dichter und heißer. Es muss einen Zeitpunkt gegeben haben, wo $a \rightarrow 0$, genannt Big Bang.
- Die Zukunft der Expansion hängt von Ω_0 und Ω_Λ ab.
- Die Expansion des Universums bedingt Rotverschiebung von Photonen; je weiter eine Quelle von uns entfernt ist, umso stärker werden deren Photonen rotverschoben.

4.3 Thermische Geschichte des Universums

Wegen $T \propto (1 + z)$ – siehe (4.34) – war Universum früher heißer; z.B. bei $z = 1200$, $T \sim 3000$ K; bei $z = 10^9$, $T \sim 3 \times 10^9$ K: Temperaturen, die die im Innern von Sternen übersteigen:

Man kann daher energetische Prozesse (wie Kernfusion) im frühen Universum erwarten. Hier sollen die wesentlichen Prozesse im frühen Universum beschrieben werden; Bemerkungen dazu:

- Temperatur und Energie lassen sich ineinander umrechnen, Einheit der Energie: Elektronenvolt, eV, $1\text{eV} = 1.1605 \times 10^4 k_B$ K; man kann Temperatur also in Energieeinheiten angeben;
- Elementarteilchen-Physik für Energien unterhalb 1 GeV sehr gut verstanden; für sehr viel höhere Energien ist die Physik unsicherer – wir beginnen Beschreibung also bei Energien unterhalb von 1 GeV.
- Die statistische Physik und Thermodynamik von Elementarteilchen wird durch die Quantenmechanik beschrieben; man unterscheidet zwischen

- *Bosonen*, Teilchen mit ganzzahligem Spin (wie z.B. dem Photon) und
- *Fermionen*, Teilchen mit halbzahligem Spin (wie z.B. Elektronen und Neutrinos).
- Wenn Teilchen sich im thermodynamischen und chemischen Gleichgewicht befinden, ist ihre Anzahldichte und Energieverteilung allein durch die Temperatur gegeben – z.B. ist Energiedichte der Photonen (4.35) allein eine Funktion von T .

Notwendige Bedingung für chemisches Gleichgewicht: Teilchen können erzeugt und vernichtet werden, z.B. e^+e^- -Paarerzeugung und Vernichtung.

Wie oben erwähnt, ist für Rotverschiebungen $z \gg z_{\text{eq}}$, mit

$$\boxed{z_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}^{-1} - 1 \approx 23900 \Omega_0 h^2}, \quad (4.43)$$

Energiedichte der Strahlung dominant; diese ist $\rho_r \propto T^4$, wobei der Vorfaktor von der Anzahl der relativistischen Teilchensorten (das sind solche, für die $k_B T \gg mc^2$ gilt) abhängt.

Wegen $T \propto 1/a$, also $\rho_r \propto a^{-4}$, dominiert Strahlungsterm völlig in Expansionsgleichung (4.16);

Ansatz: $a(t) \propto t^\beta$, eingesetzt in (4.16), ergibt

$$\boxed{a(t) \propto t^{1/2}, \quad t = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho}}, \quad t \propto T^{-2} \quad \text{in Strahlungs-dominiertes Phase}}, \quad (4.44)$$

wiederum hängt Proportionalitätskonstante von Anzahl der relativistischen Teilchensorten ab.

4.3.1 Neutrino Entkopplung

Betrachte Universum bei Temperatur $T \approx 10^{12}$ K, entsprechend ~ 100 MeV; vgl. dies mit Ruhemassen von

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Proton, } m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2, \\ \text{Neutron, } m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2, \\ \text{Elektron, } m_e = 511 \text{ keV}/c^2, \\ \text{Muon, } m_\mu = 140 \text{ MeV}/c^2: \end{array}}$$

Protonen und Neutronen (also die Baryonen) sind zu schwer, als dass sie erzeugt werden könnten; alle Baryonen, die es heute gibt, müssen damals schon vorhanden gewesen sein.

Auch Muonen können nicht mehr effizient erzeugt werden.

Vorhandene Teilchen also:

Elektronen und Positronen, Photonen, Neutrinos und ihre Antiteilchen (Neutrinomasse

nicht bekannt, wir nehmen erst mal $m_\nu = 0$ an), und als nichtrelativistische Teilchen, Protonen und Neutronen.

Alle diese Teilchen befinden sich im Gleichgewicht, z.B. durch folgende Reaktionen:

$$\begin{aligned} e^\pm + \gamma &\leftrightarrow e^\pm + \gamma: \text{Comptonstreuung,} \\ e^+ + e^- &\leftrightarrow \gamma + \gamma: \text{Paarerzeugung und Annihilation,} \\ \nu + \bar{\nu} &\leftrightarrow e^+ + e^-: \text{Neutrino-Antineutrino-Streuung.} \\ \nu + e^\pm &\leftrightarrow \nu + e^\pm: \text{Neutrino-Elektron Streuung.} \end{aligned}$$

Reaktionen mit Baryonen werden später betrachtet.

Die Energiedichte zu dieser Zeit beträgt

$$\rho = \rho_r = 10.75 \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{\hbar c^3};$$

daraus ergibt sich – siehe (4.44) –

$$t = 0.3 \text{ s} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2}. \quad (4.45)$$

Damit Teilchen im Gleichgewicht bleiben, müssen obige Reaktionen genügend häufig ablaufen; genauer:

die Reaktionsraten (Anzahl der Reaktionen pro Teilchen pro Zeiteinheit) müssen größer sein als die kosmische Expansionsrate $H(t)$;

- Reaktionsraten Γ nehmen ab: da sie proportional zur Teilchendichte (des Reaktionspartners) sind, diese wie a^{-3} abnimmt, und einige der Wirkungsquerschnitte σ monoton von der Teilchenenergie $E \sim k_B T$ abhängen, fallen Reaktionsraten mit t schnell ab;
- für Neutrinos ist $\sigma \propto E^2 \propto T^2$, so dass $\Gamma \propto n \sigma \propto T^5$;
- Verhältnis zwischen Reaktionsrate und Expansionsrate $H = \dot{a}/a \propto t^{-1} \propto T^2$:

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{1.6 \times 10^{10} \text{ K}} \right)^3$$

→ für $T \lesssim 10^{10}$ K sind Neutrinos nicht mehr mit den anderen Teilchen im Gleichgewicht;

- seither bewegen sie sich ohne weitere Wechselwirkung, bis heute;
- den Prozess des Abkoppelns von den anderen Teilchen nennt man auch *Ausfrieren*; die Neutrinos frieren bei $T \sim 10^{10}$ K aus;
- beim Ausfrieren haben sie thermische Verteilung, mit gleicher Temperatur wie die anderen Teilchensorten;

- sie behalten danach weiterhin thermische Verteilung, mit Temperatur, die wie $T \propto 1/a$ abnimmt;
- durch das Ausfrieren der Neutrinos ändert sich zunächst nichts: Expansion folgt weiterhin (4.45), Temperatur der Neutrinos T_ν ist gleich der der anderen Teilchen.

4.3.2 Paarvernichtung

Für Temperaturen kleiner als $\sim 5 \times 10^9$ K, oder $k_B T \sim 500$ keV, können Elektron-Positron Paare nicht mehr effizient erzeugt werden, während die Annihilation weiterhin abläuft;

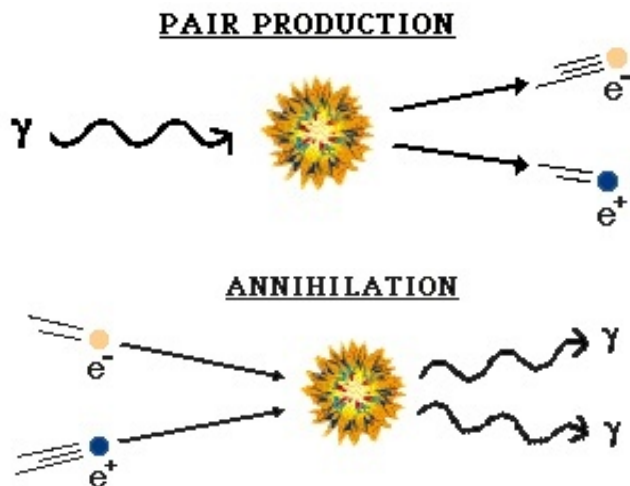


Abbildung 4.14: Bei hohen Temperaturen laufen diese beide Prozesse mit gleicher Wahrscheinlichkeit ab. Bei kleinen Temperaturen gibt es nur noch wenige Photonen, die genug Energie haben, e^+e^- -Paare zu erzeugen; dadurch wird der obere Prozess immer unwahrscheinlicher.

dadurch nimmt die Dichte der e^+e^- -Paare sehr schnell ab (der Wirkungsquerschnitt der Annihilation ist groß), die Paare zerstrahlen in Photonen;

dadurch wird Energie in das Photonengas gepumpt, d.h. die Photonenverteilung verändert sich – da die Photonen weiterhin eine Planck-Verteilung besitzen, verändert sich also deren Temperatur – relativ zu der, die sie ohne die Annihilation hätte;

insbesondere wird Photonentemperatur dadurch höher als die der Neutrinos zur gleichen Zeit:

$$T(\text{nach Annihilation}) = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T(\text{vor Annihilation}) = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\nu. \quad (4.46)$$

Dieses Temperaturverhältnis bleibt danach erhalten; die Neutrinos haben eine um $(11/4)^{1/3} \sim 1.4$ niedrigere Temperatur als die Photonen – auch noch heute:

Es gibt heute noch einen Hintergrund von Neutrinos mit einer Temperatur von $(4/11)^{1/3} T_0 \approx 1.9$ K und Dichte von $n = 113 \text{ cm}^{-3}$ pro Neutrinosorte;

dieser ist schwer nachweisbar, wegen extrem kleinem Wirkungsquerschnitt der Neutrinos.

Bei der Abschätzung von $\rho_{r,0}$ wurde die Energie in Neutrinos mitberücksichtigt, $\rho_{r,0} = 1.68 \rho_{\text{CMB},0}$.

Nach der Annihilation gilt das Expansionsgesetz

$$t = 0.55 \text{ s} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2} ; \quad (4.47)$$

durch die Annihilation ändert sich die Konstante in dieser Relation, verglichen mit (4.45)! Nach der Annihilation bleibt auch das Verhältnis von Baryondichte und Photondichte konstant; erstere wird parametrisiert durch Dichteparameter in Baryonen (heute), letztere ist durch T_0 bestimmt:

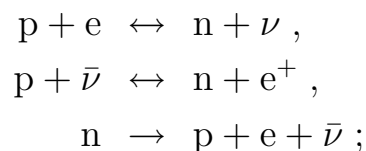
$$\boxed{\eta := \left(\frac{n_b}{n_\gamma} \right) = 2.74 \times 10^{-8} (\Omega_b h^2)} . \quad (4.48)$$

Wichtig: vor der Annihilation gab es etwa so viele Elektronen und Positronen wie Photonen; nach der Annihilation sind *fast* alle Elektronen verstrahlt – aber nicht alle: es müssen genau so viele Elektronen übrigbleiben wie Protonen, damit Universum elektrisch neutral bleibt; das Verhältnis von Elektronen zu Photonen ist daher ebenfalls durch η gegeben (genauer, etwa 0.8η , da η Protonen und Neutronen beinhaltet).

4.3.3 Primordiale Nukleosynthese

Protonen und Neutronen können sich zu Atomkernen zusammenfinden; Temperatur und Dichte im frühen Universum genügend groß zur primordialen Nukleosynthese (Big Bang nucleosynthesis, BBN).

Proton-zu-Neutron-Verhältnis: Wegen der geringen Dichte spielen die Baryonen (oder Nukleonen) keine Rolle für die Dynamik der Expansion im frühen Universum; die wichtigsten Reaktionen, mit denen sie mit dem Rest der Teilchen im Gleichgewicht bleiben, sind:

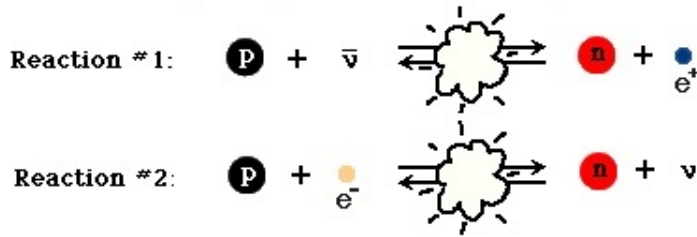


letztere ist der Zerfall des freien Neutrons, der eine Zerfallszeitskala von $\tau_n = 887 \text{ s}$ hat. Die ersten beiden Reaktionen halten das Protonen/Neutronen Verhältnis im Gleichgewicht, solange diese Reaktionen schneller ablaufen als die Expansionszeitskala; Gleichgewichtsverteilung ist gegeben durch Boltzmann-Faktor,

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp \left(- \frac{\Delta m c^2}{k_B T} \right) , \quad (4.49)$$

mit $\Delta m = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}/c^2$: Massenunterschied von Neutron und Proton.

proton/neutron conversions



(The double arrows indicate these reactions go both ways.)

Abbildung 4.15: Falls diese Reaktionen schneller ablaufen als die Expansionszeitskala, bleibt das Protonen/Neutronen Verhältnis im Gleichgewicht.

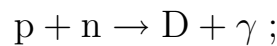
Die Gleichgewichtsreaktionen werden selten, nachdem Neutrinos ausgefrosen sind – die obigen Reaktionen beruhen auf schwacher Wechselwirkung, also der gleichen, die Neutrinos im chemischen Gleichgewicht halten;

beim Entkoppeln der Neutrinos ist $n_n/n_p \approx 1/3$.

Danach zerfällt freies Neutron auf Zeitskala τ_n ;

um heute überhaupt noch Neutronen zu haben, müssen die Neutronen schnell in Kernen gebunden werden.

Deuteriumbildung: Einfachster Kern ist Deuterium, D, bestehend aus einem Proton und einem Neutron, Bildungsreaktion



Bindungsenergie von D: $E_b = 2.225 \text{ MeV}$; diese Energie nur etwas größer als $m_e c^2$ und Δm – all diese Energien sind sehr ähnlich!

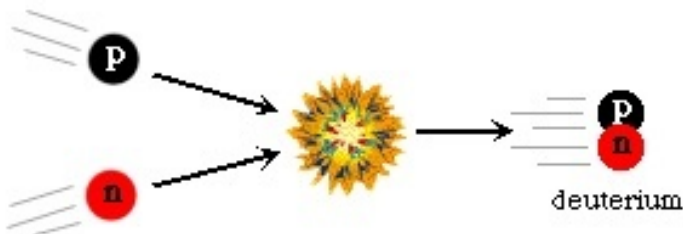


Abbildung 4.16: Deuteriumbildung

Deuteriumbildung ist Reaktion der starken Wechselwirkung, läuft sehr effizient ab.

Jedoch: zum Zeitpunkt der Entkopplung der Neutrinos und der Paarvernichtung ist T nur wenig kleiner als E_b ; weil Photonen so viel zahlreicher als Baryonen, gibt es genügend viele energetische Photonen im Wien-Schwanz der Planck-Verteilung, die D wieder zerstören.

Erst wenn $k_B T \ll E_b$ kann Deuterium in größerer Menge vorhanden sein (Beschreibung der relativen Anzahldichten von Protonen, Neutronen und Deuterium mittels einer Saha-Gleichung);

dies geschieht bei $T_D \approx 8 \times 10^8 \text{ K}$, und $t \sim 3 \text{ min}$; bis dahin sind ein Teil der Neutronen zerfallen, das Verhältnis beträgt dann $n_n/n_p \approx 1/7$.

Wegen starker Wechselwirkung werden praktisch alle Neutronen in D gebunden.

Sobald D vorhanden, bildet sich Helium (He^4), ein Kern mit großer Bindungsenergie ($\sim 28 \text{ MeV}$); bis auf kleinen Rest verwandelt sich sämtliches Deuterium in He^4 ;

man bezeichnet daher die Abhängigkeit der Heliumbildung von der kleinen Bindungsenergie von D als ‘Flaschenhals der Kernsynthese’.

Helium-Häufigkeit: Anzahldichte von Heliumkernen: $n_{\text{He}} = n_n/2$, da jeder Heliumkern zwei Neutronen enthält;

Anzahldichte von Protonen nach Heliumbildung: $n_{\text{H}} = n_p - n_n$;

daraus folgt *Massenanteil Y von He⁴*:

$$Y = \frac{4n_{\text{He}}}{4n_{\text{He}} + n_{\text{H}}} = \frac{2n_n}{n_p + n_n} = \frac{2(n_n/n_p)}{1 + (n_n/n_p)}. \quad (4.50)$$

Setzt man obiges Verhältnis bei T_D ein, $n_n/n_p \approx 1/7$, so folgt daraus

$$Y \approx 0.25 :$$

Etwa 1/4 der baryonischen Masse im Universum sollte als He⁴ gebunden sein! Dies ist eine robuste Vorhersage der Big Bang Modelle, und in hervorragender Übereinstimmung mit der Beobachtung!

Der Heliumanteil im Universum kann später durch Kernfusion in Sternen geändert werden; dabei werden auch schwerere Kerne (‘Metalle’) gebildet; Beobachtung von wenig prozessiertem Material (also solchem mit wenig Metallen) zeigt, dass $Y \sim 1/4$.

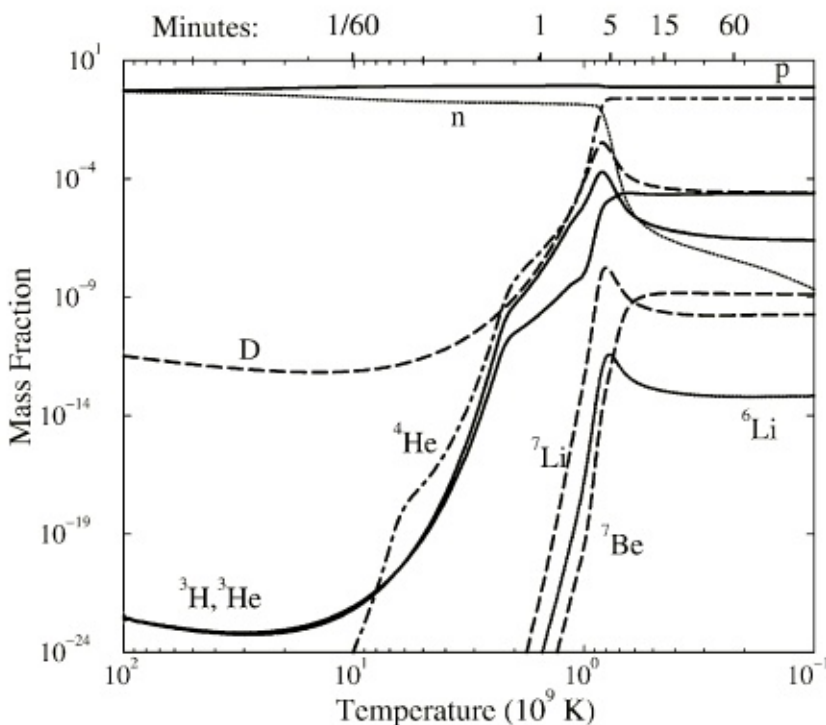


Abbildung 4.17: Die Entwicklung der Häufigkeiten der leichten, während der BBN geformten Elemente, als Funktion der Temperatur (untere Achse) und der kosmischen Zeit t (obere Achse). Besonders bemerkenswert ist der plötzliche Abfall der Neutronenhäufigkeit bei $T \sim 10^9$ K

Abhängigkeit der primordialen Häufigkeiten von Baryondichte: Am Ende der ersten drei Minuten enthält das Universum also etwa 25% Helium-Kerne, 75% Wasserstoff-Kerne (also Protonen), und Spuren von D, He³, und Li⁷; schwerere Kerne können sich nicht bilden, weil es keine stabilen Kerne der Massenzahl 5 und 8 gibt.

Dichte in He^4 und D hängt von Baryondichte im Universum ab:

je größer Ω_b , also je größer Baryon-zu-Photon-Verhältnis η (4.48), umso früher kann sich D bilden, umso weniger Neutronen sind zerfallen, umso größer n_n/n_p , und daher: umso größer Y !

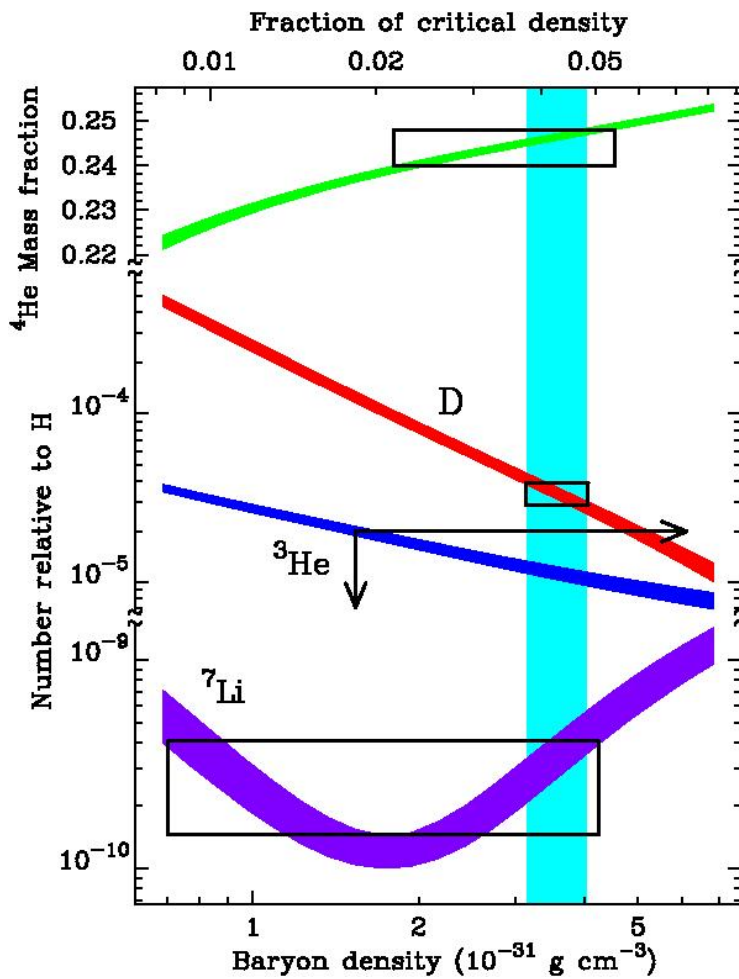


Abbildung 4.18: BBN Vorhersagen der primordialen Häufigkeiten leichter Elemente als Funktion der heutigen Baryondichte ($\rho_{b,0}$, untere Achse) und des entsprechenden Dichteparameters Ω_b , wobei $h = 0.65$ angenommen wurde. Die vertikale Ausdehnung der Rechtecke gibt die gemessenen Werte dieser Häufigkeiten an (oben: He^4 , Mitte: D, unten Li^7); die horizontale Ausdehnung ergibt sich durch den Überlap dieser Bereiche mit den theoretischen Kurven. Die durch die drei Elemente erlaubten Werte von Ω_b überlappen, dargestellt durch den vertikalen Streifen. Die Deuterium-Messungen geben die stärksten Einschränkungen an Ω_b .

Das gleiche Argument gilt für D:

je größer Ω_b , umso größer die Baryondichte bei Umwandlung von D in He^4 , deshalb Umwandlung effizienter, vollständiger, deshalb D kleiner.

Der Baryonenanteil im Universum: Aus Messungen der primordialen Häufigkeiten von He^4 und D und Vergleich mit detaillierten Rechnungen der Kernsynthese im frühen Universum kann daher η bzw. Ω_b bestimmt werden;

Anteil von D besonders empfindlich auf Ω_b ;

Messungen der relativen Stärke der $\text{Ly}\alpha$ Linie von H und D (aufgrund der unterschiedlichen Kernmasse ist Übergangsfrequenz leicht verschieden) im ISM und in QSO Absorptionssystemen (wird später noch besprochen) ergibt $\text{D}/\text{H} \approx 3.4 \times 10^{-5}$; daraus folgt:

$$\boxed{\Omega_b h^2 \sim 0.02} \quad : \quad (4.51)$$

Da die Hubble Konstante $H_0 \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, also $h \sim 0.7$, ist $\Omega_b \approx 0.03$! Da $\Omega_0 > 0.1$, bedeutet das, dass Baryonen nur einen kleinen Teil der Materie im Universum darstellen können; der größte Teil der Materie ist nicht-baryonische, Dunkle Materie!

Natur der Dunklen Materie zur Zeit noch unbekannt; hier sollen zwei Möglichkeiten betrachtet werden:

Neutrinos als Dunkle Materie: Falls Neutrinos Ruhemasse besitzen (vermutlich liegt die Masse der Neutrinos unterhalb 1 eV, aber ist von Null verschieden), wären sie im Prinzip Kandidaten für Dunkle Materie;

solange $m_\nu \ll 1 \text{ MeV}$, wären massive Neutrinos ultra-relativistisch z.Zt. ihrer Entkoppelung; obige Betrachtung, die auf $m_\nu = 0$ basierte, bleibt dadurch unverändert; insbesondere die Schlussfolgerung auf heutige Neutrinodichte $n = 113 \text{ cm}^{-3}$ bleibt bestehen;

Massendichte und der entsprechende Dichteparameter jeder Neutinosorte kann dann berechnet werden:

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{m_\nu}{91.5 \text{ eV}}. \quad (4.52)$$

Wenn also eines der Neutrinos eine Masse von $\sim 30 \text{ eV}$ hätte, könnten sie im Prinzip die Dunkle Materie im Universum darstellen; Elektron-Neutrino ist sehr viel leichter, $m_{\nu_e} \lesssim 1 \text{ eV}$, aber Muon und τ -Neutrino haben keine guten Massenschranken.

Neutrinos als *dominanter* Anteil Dunkler Materie kann ausgeschlossen werden aus Betrachtungen der Strukturbildung im Universum (siehe Kapitel 7).

Da man sicherlich $\Omega_0 < 2$ hat, bedeutet (4.52) insbesondere:

Aus kosmologischen Betrachtungen folgt, dass keines der Neutrinos eine Ruhemasse im Bereich $200 \text{ eV} \leq m_\nu \lesssim 1 \text{ MeV}$ haben kann – viel bessere Schranken, als derzeit im Labor erhältlich.

Diese Schranken sehr konservativ: Hinzunahme von Strukturbildung und Betrachtung des Ausfrierens semi-relativistischer Neutrinos kann Bereich ausdehnen auf $10 \text{ eV} \lesssim m_\nu \lesssim 1 \text{ GeV}$.

Inzwischen gibt es deutliche Hinweise darauf, dass Neutrinos eine kleine, aber endliche Ruhemasse besitzen.

WIMPs als Dunkle Materie: Falls es andere schwach-wechselwirkende Teilchen (weakly interacting massive particles, oder WIMPs) gibt, gelten für sie die gleichen Argumente wie für die Neutrinos: der obige Massenbereich ist ausgeschlossen, weil diese Teilchen sonst $\Omega_0 \gg 1$ produzieren würden; schwerere WIMPs sind möglich – diese wären bei Neutrinoentkopplung und Kernsynthese nicht-relativistisch und tragen genauso wenig zur Expansionsrate bei wie Baryonen – verändern also obige Betrachtung nicht.

Praktisch alle Erweiterungen der Standard-Modells der Teilchenphysik sagen solche WIMPs vorher; noch sind sie aber nicht gemessen worden.

Weitere Bemerkungen:

- Zahlenwerte oben beruhen auf Annahme, dass es drei Neutrino-Familien gibt. Falls $N_\nu > 3$, ändern sich die Werte: Expansion verläuft schneller [weil $\rho(T)$ größer]
 → weniger Zeit bis zum Abkühlen auf T_D
 → weniger Neutronenzerfall
 → höherer Heliumanteil.
 Aus BBN wurde schon vor 1990 geschlossen, dass $N_\nu = 3$ (allerdings mit einigermaßen großen Unsicherheiten); 1990 wurde aus dem Zerfall des Z-Bosons $N_\nu = 3$ im Labor gemessen.
- Um Schlussfolgerung auf dominanten Anteil nicht-baryonischer Materie zu umgehen, wurden inhomogene Modelle der BBN untersucht; doch bieten diese keinen Ausweg von kleinem Ω_b .

4.3.4 Rekombination

Nach ca. 3 Minuten ist BBN abgeschlossen; das Universum ist dann $T \sim 8 \times 10^8$ K heiß; es besteht dann aus Photonen, Protonen, Helium-Kernen, Spuren anderer leichter Elemente, und Elektronen; daneben Neutrinos, die gemeinsam mit den Photonen die Energiedichte und damit die Expansionsrate dominieren, und (wahrscheinlich) WIMPs; bei weiterer Abkühlung geschieht zunächst ‘nichts Besonderes’;

bei $z = z_{\text{eq}} \approx 23900 \Omega_0 h^2$ beginnt Materie die Energiedichte im Universum, damit die Expansionsrate, zu dominieren; in (4.26) dominiert danach zweiter Term, also $H^2 \approx H_0^2 \Omega_0 / a^3$;

Potenzgesetz-Ansatz, $a \propto T^\beta$ liefert $\beta = 2/3$, also

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_0} H_0 t \right)^{2/3} \quad \text{für } a_{\text{eq}} \ll a \ll 1}; \quad (4.53)$$

dieses Verhalten gilt so lange, bis entweder der Krümmungsterm oder, falls dieser 0 ist, der Lambda Term zu dominieren beginnt.

Nach weiterer Abkühlung können die freien Elektronen sich mit den Kernen zu neutralen Atomen verbinden; man nennt diesen Prozess *Rekombination*, ist aber irreführender Begriff: da Universum bis dahin vollständig ionisiert war, ist es also keine *Rekombination* – aber der Begriff hat sich eingebürgert.

Rekombination zwischen Elektron und Kern konkurriert mit Ionisation neutraler Atome durch energetische Photonen (Photoionisation; Ionisation durch Stöße völlig unwichtig, wegen kleinem η);

da Photonen viel zahlreicher als Elektronen, muss Abkühlung bis weit unter die Ionisationstemperatur fortschreiten, bevor Atome sich effizient bilden können:

Ionisationsenergie des Wasserstoffs: $\chi = 13.6 \text{ eV}$, entspricht $T > 10^5 \text{ K}$, aber wegen $\eta \sim 3 \times 10^{-10}$ muss T erst unterhalb $\sim 3000 \text{ K}$ sinken, bevor Ionisationsgrad deutlich unter 1 fällt.

Definiere Ionisationsgrad

$$x = \frac{\text{Anzahldichte der freien Elektronen}}{\text{Anzahldichte der insgesamt vorh. Protonen}} ; \quad (4.54)$$

für Temperaturen $T \gg 10^4 \text{ K}$, $x = 1$, praktisch alle Elektronen sind ungebunden.

Beginn der Rekombination wird wiederum durch Saha-Gleichung beschrieben,

$$\frac{1-x}{x^2} \approx 3.84 \eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\chi}{k_B T} \right)$$

daraus ergibt sich, dass bei $z \sim 1300$ etwa $x = 0.1$.

Aber Saha-Gleichung beruht auf thermischen Gleichgewicht; dieses ist nicht mehr gegeben nach Einsetzen der Rekombination:

Jede Rekombination direkt in den Grundzustand setzt Photon der Energie $\hbar\omega > \chi$ frei – diese Photonen können andere Atome im Grundzustand ionisieren; \rightarrow für jede Rekombination in den Grundzustand wird ein neutrales Atom ionisiert, der Netto-Effekt verschwindet!

Rekombination kann auch schrittweise erfolgen, erst in angeregten Zustand, dann durch Übergänge in den Grundzustand;

jede solche Rekombination setzt ein Ly α Photon frei, beim Übergang vom ersten angeregten Zustand zum Grundzustand;

dieses Ly α Photon kann wiederum anderes Atom im ersten angeregten Zustand ionisieren, der Netto-Effekt ist wiederum verschwindend;

diese Prozesse führen dazu, dass die kleine Störung des Planck-Spektrums (im Bereich $\chi \gg k_B T$) die Rekombination erschwert – diese Störungen des Planck-Spektrums können nicht schnell genug ausgeglichen werden – vgl. Gasnebel, dort können Ly α Photonen entkommen, denn diese sind endlich!

Rekombination findet letztendlich statt über einen sehr seltenen Prozess, dem Zwei-Photonen-Zerfall des ersten angeregten Zustands; dieser ist zwar etwa 10^8 Mal seltener als direkter Ly α Übergang, aber erzeugt Photonen, die nicht mehr ionisieren können; also eine Senke energetischer Photonen.

Betrachtung aller relevanter Prozesse liefert:

$$\boxed{x(z) = 2.4 \times 10^{-3} \frac{\sqrt{\Omega_0} h^2}{\Omega_b h^2} \left(\frac{z}{1000} \right)^{12.75}} \quad (4.55)$$

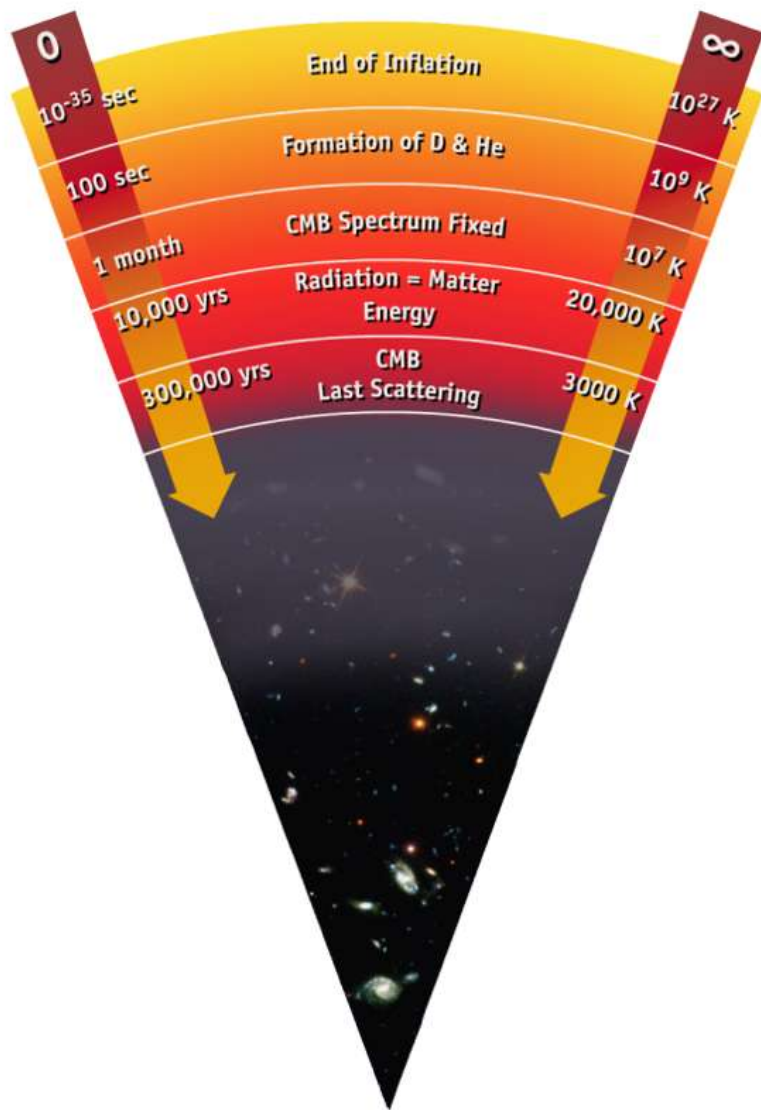


Abbildung 4.19: Illustration der thermischen Geschichte des Universums. Auf der linken Skala ist die Zeit seit dem Big Bang angegeben, die rechte Skala zeigt die Temperatur des Universums. Inflation – siehe Abschnitt 4.4.2 – findet zu sehr frühen Zeiten statt, gefolgt von der Bildung der leichten Atomkerne, insbesondere Helium. Nach etwa einem Monat sind Prozesse zur Erzeugung von Photonen langsamer als Expansionsrate; Störungen des Planck Spektrums zu späteren Zeiten wären im CMB Spektrum heute sichtbar. Bei $t \sim 10^4$ y ist Energiedichte in Strahlung und Materie in etwa gleich; dies entspricht dem Skalenfaktor a_{eq} . Rekombination findet bei $t \sim 3 \times 10^5$ y statt, danach beginnen die ‘dark ages’ (Quelle: E.L. Wright’s Web page)

Ionisationsgrad ist also sehr starke Funktion der Rotverschiebung; über relativ kleinen Rotverschiebungsbereich ändert sich x von 1 – vollständiger Ionisation – zu $x \sim 10^{-4}$, praktisch nur noch neutrale Atome;

Rekombination nicht vollständig; ein kleiner Ionisationsgrad $x \sim 10^{-4}$ bleibt übrig, da Rekombinationsrate für kleine x kleiner als Expansionsrate.

Aus (4.55) kann man optische Tiefe zur Thompson Streuung (Streuung von Photonen an freien Elektronen) berechnen:

$$\tau(z) = 0.37 \left(\frac{z}{1000} \right)^{14.25}, \quad (4.56)$$

praktisch unabhängig von kosmologischen Parametern.

→ Photonen können sich von $z \sim 1000$ (“last-scattering surface”) bis heute ausbreiten, ohne mit Materie wechselzuwirken – solange Wellenlänge größer als 1216 \AA ist.

Die Planck-Verteilung der Photonen hat sich bis heute erhalten, rotverschoben zu Mikrowellen, der CMB!

*Betrachtung des frühen Universums sagt CMB vorher (Gamow 1946);
CMB ist sichtbares Überbleibsel des Big Bang.*

Entdeckung 1965 durch Penzias & Wilson!

A MEASUREMENT OF EXCESS ANTENNA TEMPERATURE AT 4080 Mc/s

Measurements of the effective zenith noise temperature of the 20-foot horn-reflector antenna (Crawford, Hogg, and Hunt 1961) at the Crawford Hill Laboratory, Holmdel, New Jersey, at 4080 Mc/s have yielded a value about 3.5° K higher than expected. This excess temperature is, within the limits of our observations, isotropic, unpolarized, and

Abbildung 4.20: Die ersten Zeiles des Artikels von Penzias & Wilson 1965

COBE hat Spektrum sehr genau vermessen; es ist bester je gemessener Schwarzkörper; aus oberer Schranke von Abweichungen vom Planck-Spektrum kann man sehr enge Grenzen an mögliche Energie-Einspeisung in das Photonengas, und damit an energetische Prozesse im Universum erhalten.

Beispiel: Es gibt einen Röntgen-Hintergrund (X-ray background, XRB), eine zunächst als isotrop gemessene Strahlung; eine mögliche Erklärung dafür war lange Zeit ein heißes intergalaktisches Medium, mit Temperatur $k_B T \sim 40$ keV, Bremsstrahlung emittierend; ein solches heißes intergalaktisches Gas würde Spektrum des CMB modifizieren, durch Streuung der CMB Photonen an energetischen Elektronen (inverse Compton Streuung) und ist als Quelle des XRB durch COBE ausgeschlossen; nach ROSAT, Chandra und XMM-Newton (bessere Winkelauflösung) wissen wir, dass XRB Überlagerung der Strahlung diskreter Quellen ist, hauptsächlich AGNs.

Bemerkungen:

- Oben nur Rekombination von H betrachtet; da He höhere Ionisationsenergie, re-kombiniert He früher als H;
- obwohl Rekombination relativ plötzlich, sagt (4.56), dass wir Photonen aus Rekombinationsschicht endlicher Dicke ($\Delta z \sim 60$) erhalten;
- irgendwann zwischen $z \sim 1000$ und heute muss das Universum wieder ionisiert worden sein: baryonisches Gas im intergalaktischen Medium ist hochgradig ionisiert – ansonsten könnten wir keine UV Photonen von Quelle großer Rotverschiebung erhalten (Gunn–Peterson Test, siehe Kapitel 7); heute sind Quellen mit $z > 5.5$ bekannt; spätestens zu diesem Zeitpunkt muss Universum fast vollständig ionisiert worden sein; vermutlich durch erste Generation von Sternen oder den ersten AGNs; deren z bislang nicht bekannt, aber mit $z \sim 20$ abgeschätzt.

4.4 Erfolg und Probleme des Standardmodells

4.4.1 Erfolge

Das oben beschriebene Standardmodell hat viele beeindruckende Erfolge vorzuweisen:

- Es sagt vorher, dass relativ wenig prozessiertes (d.h. Metall-armes) Gas einen Heliumanteil von $\sim 25\%$ haben sollte, in hervorragender Übereinstimmung mit den Beobachtungen.
- Es sagt vorher, dass Quellen mit niedriger Rotverschiebung näher bei uns sind als solche größerer Rotverschiebung [allerdings: Pekuliarebewegungen geben zusätzliche (Doppler-)Rotverschiebung]; daher muss Absorption von Strahlung von Quellen großer Rotverschiebung bei kleineren Rotverschiebung erfolgen – bislang ist noch kein einziges Gegenbeispiel gefunden worden – modulo Pekuliargeschwindigkeiten.
- Es sagt CMB vorher!
- Es sagt die richtige Anzahl von Neutrino-Familien vorher!

Weitere Erfolge werden dann besprochen, wenn wir Strukturentwicklung im Universum diskutieren.

Weiterhin kann das Standard-Modell durch eine einzige Beobachtung falsifiziert werden: es wäre mit dem Modell unverträglich,

- wenn der He-Gehalt einer Gaswolke oder eines Sterns mit kleiner Metallizität deutlich unter 25% wäre;
- wenn man messen würde, dass eines der Neutrinos eine Ruhemasse von $\gtrsim 100$ eV hätte;
- wenn der Wien-Teil des CMB gegenüber dem Planck-Spektrum niedriger wäre;
- wenn eine Quelle mit Emissionslinien bei z_e Absorptionslinien mit $z_a \gg z_e$ besäße;
- wenn die kosmologischen Parameter so wären, dass $t_0 \lesssim 10$ Gyrs.

Obwohl diese Vorhersagen seit > 30 Jahren weit bekannt, ist bislang keine Beobachtung gemacht worden, die Standard-Modell widerlegt!

Alternative kosmologische Modelle sind entweder bereits durch Beobachtungen ausgeschlossen worden (z.B. steady-state cosmology), oder aber sind nicht vorhersagekräftig – zur Zeit gibt es keine ernsthafte Alternative zum Standard-Modell.

4.4.2 Probleme und Erweiterungen

Die Einsteinsche Feldgleichung, deren Lösung hier als Weltmodell beschrieben worden ist, ist ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen. Wie stets bei solchen Gleichungen, sind Lösungen bestimmt (1) durch Gleichungssystem selbst und (2) durch die Anfangsbedingungen.

Wenn bei $t = 1$ s Anfangsbedingungen so sind, wie hier beschrieben, dann ist alles OK, aber:

Warum sind die Bedingungen bei $t = 1$ s so, dass sie homogenes, isotropes Modell erlauben? – Die Menge der homogenen und isotropen Lösungen der Einstein-Gleichung sind vom Maße Null, also *sehr* speziell.

Einfachste Antwort: weil noch frühere Prozesse (mit bekannter oder bislang unbekannter Physik?) zu solchen ‘Anfangsbedingungen’ geführt haben?

Wir betrachten zwei Probleme des Standardmodells etwas genauer, das Horizont Problem, und das Problem der Flachheit.

Horizonte. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts impliziert, dass wir nur einen endlichen Ausschnitt des Universum überhaupt beobachten können; da $t_0 \sim 12$ Gyrs, können wir keine Information aus Bereichen des Universums erhalten, die weiter als 12 Milliarden Lichtjahre entfernt sind (wenn man ‘Entfernung’ hier geeignet definiert).

Es gibt also einen Horizont, über den hinaus wir nicht schauen können.

Solche Horizonte gibt es nicht nur für uns:

zu einem früheren Zeitpunkt t war der Horizont etwa ct , also kleiner als heute.

Quantitative Betrachtung: in Zeitintervall dt legt Licht die Strecke $c dt$ zurück; dies entspricht bei dem Skalenfaktor a einem mitbewegten (comoving) Längenintervall $c dt/a$;

seit dem Urknall bis zur Zeit t (bzw. Rotverschiebung z) kann Licht eine mitbewegte Distanz von

$$r_{\text{H,com}}(z) = \int_0^t \frac{c dt}{a(t)}$$

zurücklegen; mit $\dot{a} = da/dt$ folgt $dt = da/\dot{a} = da/(aH)$, so dass

$$\boxed{r_{\text{H,com}}(z) = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{c da}{a^2 H(a)}} \quad (4.57)$$

Falls $z_{\text{eq}} \gg z \gg 0$, kommt Hauptbeitrag des Integrals von Zeiten (oder Werten von a), in denen Staub die Expansionsrate H dominiert; dann ist nach (4.26) $H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_0} a^{-3/2}$; Einsetzen in (4.57) ergibt

$$\boxed{r_{\text{H,com}}(z) \approx 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)\Omega_0}} \quad \text{für} \quad z_{\text{eq}} \gg z \gg 0} \quad (4.58)$$

Für frühere Phasen, $z \gg z_{\text{eq}}$, ist H Strahlungs-dominiert, $H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r},0}/a^2}$, und dann

$$\boxed{r_{\text{H,com}}(z) \approx \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r},0}}} \frac{1}{(1+z)} \quad \text{für } z \gg z_{\text{eq}}.} \quad (4.59)$$

Man sieht: je weiter man in Vergangenheit zurückgeht, um so kleiner wird die mitbewegte Länge des Horizonts.

Betrachte Rekombinationszeitpunkt, $z_{\text{rec}} \sim 1000$; dann gilt (4.58);
der mitbewegten Länge $r_{\text{H,com}}$ entspricht die physikalische Eigenlänge (proper length)

$$r_{\text{H,prop}} = a r_{\text{H,com}} ,$$

also

$$r_{\text{H,prop}}(z_{\text{rec}}) = 2 \frac{c}{H_0} \Omega_0^{-1/2} (1+z_{\text{rec}})^{-3/2} ;$$

dies ist die Horizontlänge bei der Rekombination;

man kann nun ausrechnen, welchem Winkel am Himmel diese Länge entspricht,

$$\theta_{\text{H,rec}} = \frac{r_{\text{H,rec}}}{D_{\text{A}}(z_{\text{rec}})} ,$$

mit D_{A} : Winkelentfernung; aus (4.41) findet man für $z \gg 1$, dass

$$D_{\text{A}}(z) \approx \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_0 z} \quad \text{für } z \gg 1 ;$$

somit ist

$$\boxed{\theta_{\text{H,rec}} \approx \sqrt{\frac{\Omega_0}{z_{\text{rec}}}} \sim \frac{\sqrt{\Omega_0}}{30} \sim \sqrt{\Omega_0} 2^\circ} : \quad (4.60)$$

die Horizontlänge bei der Rekombination nimmt heute einen Winkel von etwa einem Grad am Himmel ein.

Das Horizont Problem: *Da kein Signal sich schneller als Licht ausbreiten kann, bedeutet (4.60): CMB Strahlung aus zwei Richtungen, die mehr als etwa ein Grad getrennt sind, stammen aus Gebieten, die bis zu diesem Zeitpunkt nicht im kausalen Kontakt standen – d.h., diese beiden Gebiete konnten nie miteinander Information austauschen, z.B. darüber, was ihre Temperatur ist; trotzdem ist ihre Temperatur gleich, denn CMB ist isotrop!*

Dichteparameter als Funktion der Rotverschiebung. Wir haben die Dichteparameter Ω_0 und Ω_{Λ} definiert als heutige Dichte, dividiert durch kritische Massendichte; man kann diese Definition verallgemeinern: falls wir zu einem anderen Zeitpunkt existierten, wären die Dichten und die Hubble Konstante anders, und wir kämen zu anderen Werten von den Dichteparametern.

The Horizon Problem

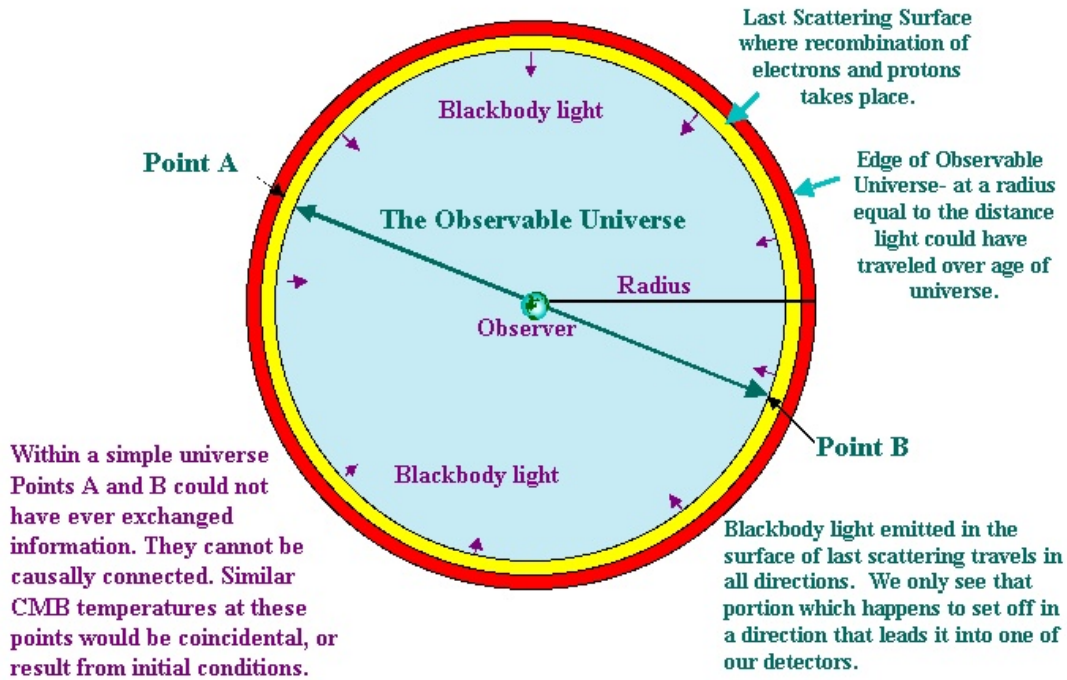


Abbildung 4.21: Das Horizont Problem

Definiere totalen Dichteparameter für beliebige Rotverschiebung

$$\Omega_{\text{tot}}(z) = \frac{\rho_{\text{d}}(z) + \rho_{\text{r}}(z) + \rho_{\Lambda}}{\rho_{\text{cr}}(z)}, \quad (4.61)$$

wobei kritische Dichte ρ_{cr} ebenfalls Funktion der Rotverschiebung,

$$\rho_{\text{cr}}(z) = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}.$$

Setzt man nun

$$\rho_{\text{d}} = \frac{\rho_{\text{d},0}}{a^3}; \quad \rho_{\text{r}} = \frac{\rho_{\text{r},0}}{a^4}; \quad \rho_{\Lambda} = \Omega_{\Lambda} \rho_{\text{cr}}(0),$$

in (4.61) ein, so findet man

$$\Omega_{\text{tot}}(z) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left(\frac{\Omega_{\text{d},0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{r},0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda}\right);$$

benutzt man nun (4.26), erhält man

$$1 - \Omega_{\text{tot}}(z) = F [1 - \Omega_{\text{tot},0}], \quad (4.62)$$

wobei $\Omega_{\text{tot},0}$: totaler Dichteparameter heute, und

$$F = \left(\frac{H_0}{a H(a)}\right)^2. \quad (4.63)$$

Man sieht aus (4.62): falls $\Omega_{\text{tot}} = 1$ zu irgendeinem Zeitpunkt, so gilt dies für alle Zeiten; da $\Omega_{\text{tot}} - 1$ proportional zur Krümmung K – siehe (4.25) – bedeutet dies: ein flaches Universum mit $K = 0$ bleibt flach für alle Zeiten;

weiterhin folgt aus (4.62): falls $\Omega_{\text{tot}} < 1$ zu irgendeinem Zeitpunkt, ist $\Omega_{\text{tot}} < 1$ immer; das Umgekehrte gilt für $\Omega_{\text{tot}} > 1$.

Betrachte den Faktor F zu sehr frühen Zeiten, bei $z \gg z_{\text{eq}}$, also im Strahlungsdominierten Universum; dort gilt mit (4.26)

$$F = \frac{1}{\Omega_{\text{r},0}(1+z)^2};$$

also: für sehr frühe Zeiten wird F sehr klein; z.B. bei $z \sim 10^{10}$, etwa vor dem Ausfrieren der Neutrinos, ist $F \sim 10^{-15}$.

Heute ist Ω_{tot} von der Größenordnung 1, aber nicht notwendigerweise genau 1; aus Beobachtung wissen wir, dass $0.1 \lesssim \Omega_{\text{tot},0} \lesssim 2$ ist (großzügige Abschätzung), also

$$|1 - \Omega_{\text{tot},0}| \lesssim 1;$$

da F so klein für große Rotverschiebungen, bedeutet dies, dass $\Omega_{\text{tot}}(z)$ sehr sehr nahe bei 1 sein muss; z.B. bei $z \sim 10^{10}$,

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| \lesssim 10^{-15} !$$

Flatness Problem: *Damit totaler Dichteparameter heute von der Größenordnung 1 sein kann, muss er zu sehr frühen Zeiten extrem nahe bei 1 gewesen sein – sehr präzise ‘Feinabstimmung’ notwendig.*

Inflation. Eine Antwort auf Horizont und Flatness Problem ist: die Anfangsbedingungen waren nun einmal so!

Aber diese Sichtweise ist natürlich unbefriedigend, sie erklärt nichts!

Anfang der 80’er Jahre wurde ein Modell entwickelt, welches diese beiden Probleme (und einige andere mehr) physikalisch löst, das Modell der *Inflation*.

Dazu beachte: physikalische Gesetze der Elementarteilchen gut bekannt bis hin zu Energien ~ 100 GeV; diese sind experimentell überprüfbar;

für größere Energien sind Teilchen und Wechselwirkungen unbekannt;

dies bedeutet, dass die Geschichte des Universums, wie oben skizziert, nur ab Energien von etwa 100 GeV als gut gesichert gelten kann; Extrapolation zu noch früheren Zeiten (also bis zum Urknall) sehr unsicher.

Aus der Teilchenphysik erwartet man neue Phänomene bei etwa 10^{14} GeV, entsprechend $t \sim 10^{-34}$ s.

Szenario: nehme an, dass bei sehr frühen Zeiten Vakuumenergie sehr viel größer war als heute, so dass Ω_{Λ} die Hubble-Expansion dominiert hat;

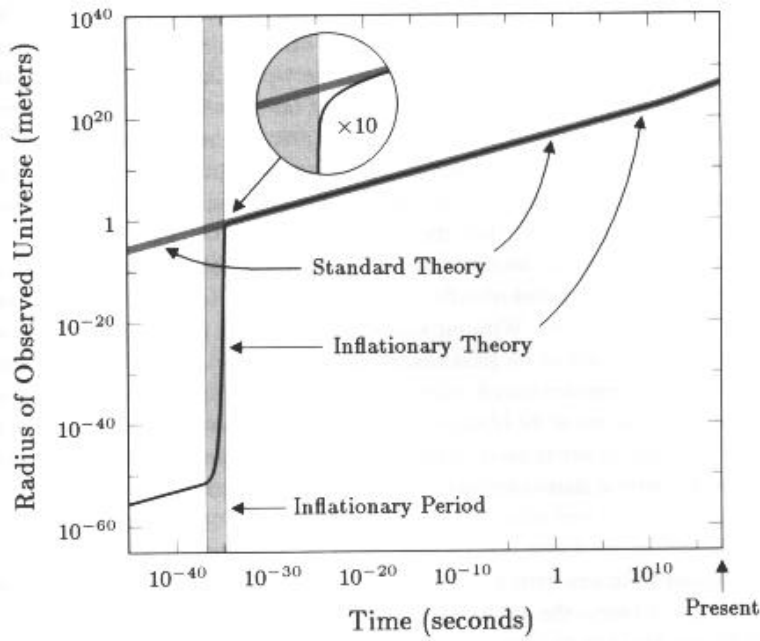


Abbildung 4.22: Während einer inflationären Phase expandiert das Universum exponentiell; siehe (4.64). Diese Phase wird beendet, wenn durch einen Phasenübergang die Vakuumenergie in 'normale' Materie (mit positivem Druck) umgewandelt wird, und danach das Universum normale Friedmann Expansion durchläuft

dann folgt aus (4.16), dass $\dot{a}/a \approx \sqrt{\Lambda/3}$; das bedeutet, dass dann Universum exponentiell expandiert,

$$a(t) = C \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right); \quad (4.64)$$

offensichtlich kann diese exponentielle Expansion (oder inflationäre Phase) nicht ewig weitergehen; nimmt man an, dass Materie einen Phasenübergang macht, in dem Vakuumenergiedichte in normale Materie umgewandelt wird, stoppt exponentielle Expansion, und die normale Friedmann Entwicklung des Universums beginnt.

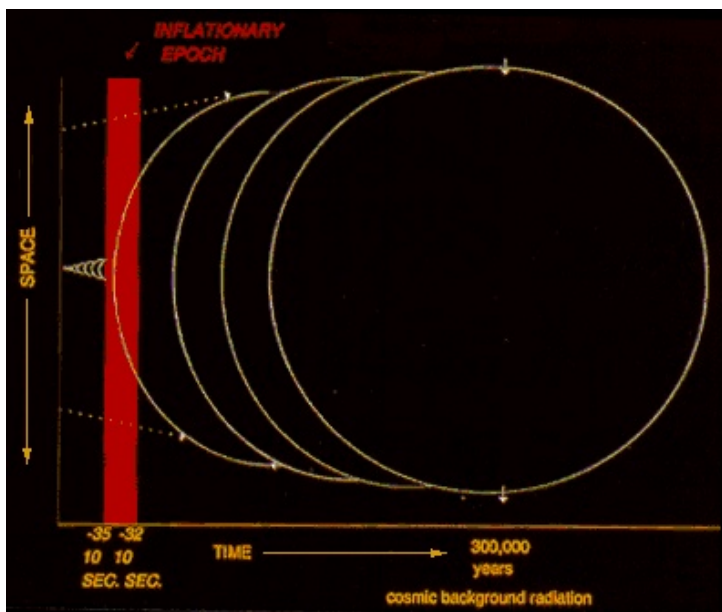


Abbildung 4.23: Schematischer Ablauf der Inflationsepoche: innerhalb kurzer Zeit dehnt sich das Universum sehr stark aus.

Inflation löst Horizont-Problem:

- Während der Inflation ist $H(a)$ konstant, so dass das Integral (4.57) für die Horizontlänge formal divergiert;

durch die inflationäre Phase kann der Horizont beliebig groß werden, abhängig von der Dauer der exponentiellen Expansion;

- das bedeutet: ein sehr kleines Raumgebiet mit Ausdehnung $L < ct_i$ zur Zeit $t_i \sim 10^{-34}$ s vor Beginn der Inflation ist im kausalen Kontakt; es dehne sich um ein Vielfaches aus, z.B. um einen Faktor $\sim 10^{40}$; aus ursprünglich $L \sim 10^{-24}$ cm werden dann am Ende der inflationären Phase bei $t_f \sim 10^{-32}$ s: 10^{16} cm;
- die danach (für $t > t_f$) erfolgende ‘normale’ kosmische Expansion dehnt dieses Raumgebiet bis heute um einen Faktor $\sim 10^{25}$ aus, auf $\sim 10^{41}$ cm – dies ist wesentlich größer als heutiges Universum, also als c/H_0 !
- Nach diesem Szenario war das gesamte heute sichtbare Universum vor Beginn der Inflation in kausalem Kontakt.

Die Inflation löst auch das Flatness Problem:

durch die gewaltige Ausdehnung wird jede ursprüngliche Krümmung ‘weggeglättet’; formal sieht man dies so, dass während der inflationären Phase

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1,$$

und da angenommen wird, die inflationäre Phase dauert lange genug, so dass Vakuumsenergie völlig dominiert, ist dann $\Omega_{\text{tot}} = 1$, das Universum also in extrem guter Näherung flach ist.

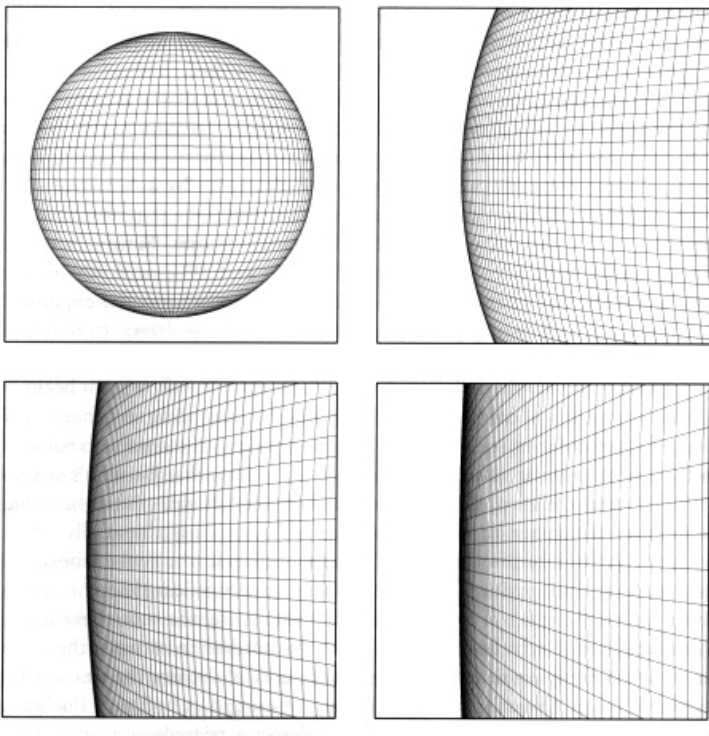


Abbildung 4.24: Durch die gewaltige Ausdehnung während der Inflation wird auch ein Universum mit Raumkrümmung wie ein flaches Universum aussehen.

Daher macht inflationäres Modell die Vorhersage, dass auch heute noch sehr genau $\Omega_{\text{tot}} = 1$ gilt (alle anderen Werte für Ω_{tot} würden wiederum einer ‘Feinabstimmung’ bedürfen), das Universum also flach ist.

Einzelheiten des inflationären Szenariums sind nicht geklärt, aber diese beiden (und weitere) Erfolge lassen eine inflationäre Phase als sehr plausibles Bild erscheinen.