Klassische Theoretische Physik: Elektrodynamik

Kaustuv Basu

(Deutsche Übersetzung: Jens Erler)

Argelander-Institut für Astronomie
Auf dem Hügel 71

kbasu@astro.uni-bonn.de

Website:
www.astro.uni-bonn.de/TP-L

28. Jan. 2014

Literturvorschläge:

1) A. Zangwill, Modern Electrodynamics, Chapter 23
2) Online buch (und die Übungen) von Bo Thide: www.plasma.uu.se/CED/Book/
3) J. D. Jackson, Klassische Elektrodynamik (3. Auflage)

12. Strahlung: Besondere Fälle

In diesem Kapitel betrachten wir die Strahlung eines einzelnen geladenen Teilchens (meist eines Elektrons) in einigen besonderen Fällen. Die interessantesten Fälle sind diejenigen, in denen sich das Teichen mit ultrarelativistischen Geschwindigkeiten bewegt ($\beta \approx 1$). Zuerst soll aber noch erwähnt werden was im Fall von N Teichen passieren kann.

Strahlung von *N* beschleunigten geladenen Teichen

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Strahlung eines beschleunigten geladenen Teilchens (z.B. eines Elektrons) gefunden und außerdem eine Formel für die Gesamtstrahlungsleistung hergeleitet. Können wir annehmen, dass im allgemeinen Fall von N Teilchen die Gesamtstrahlungsleistung einfach N-mal so hoch ist? Leider ist die Antwort nicht so einfach! Um die genaue Lösung zu finden benötigt man die Quantenmechanik. Im Allgemeinen gibt es drei verschiedene Fälle:

1) Der Abstand der strahlenden Teichen ist viel kleiner als ihre typische Wellenlänge. In diesem Fall können Phasendifferenzen vernachlässigt werden und die elektrischen und magnetischen Felder werden einfach aufsummiert, d.h. Die Feldstärken sind proportional zu N. Da die emittierte Leistung proportional zum Produkt der Feldstärken ist wächst die emittierte Leistung proportional zu N^2. Dies ist der Fall bei kohärenter Emission. Beispiel: Laser.

2) Es ist auch möglich, dass die strahlenden Teilchen vollständig außer Phase sind, sodass sich ihre Phasen gegenseitig aufheben. In diesem Fall ist die Gesamtstrahlungsleistung gleich Null.

3) Am häufigsten ist jedoch, dass die Teichen einer Zufallsverteilung folgen, welche oft durch eine thermische Geschwindigkeitsverteilung charakterisiert wird. In diesem Fall kann gezeigt werden, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt $\sqrt{N}$ Teichen in Phase sind, sodass die emittierte Gesamtstrahlungsleistung einfach proportional zu N ist. Dieser Fall wird als inkohärente Strahlung bezeichnet und beinhaltet die meisten Beispiele aus dem Alltag und dem Universum.

Beispiele für die Strahlung beschleunigter Elektronen

In der letzten Vorlesung haben wir die allgemeine Formel für die abgestrahlte Leistung eines geladenen Teilchens in beliebiger Bewegung als Funktion des Raumwinkels kennengelernt:

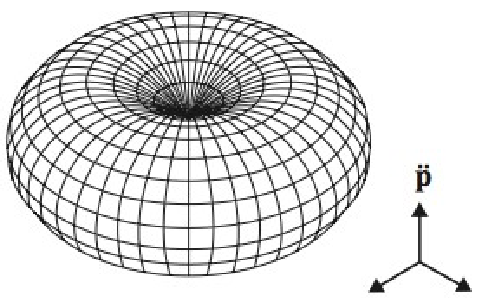
$$\frac{dP(t_{\text{ret}})}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{\text{ret}}d\Omega} = g_{\text{ret}}R^2\mathbf{S}(t)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\left.\frac{\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left[(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2}{(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}\right|_{\text{ret}}.$$

• Nichtrelativistische Bewegung und Dipolstrahlung

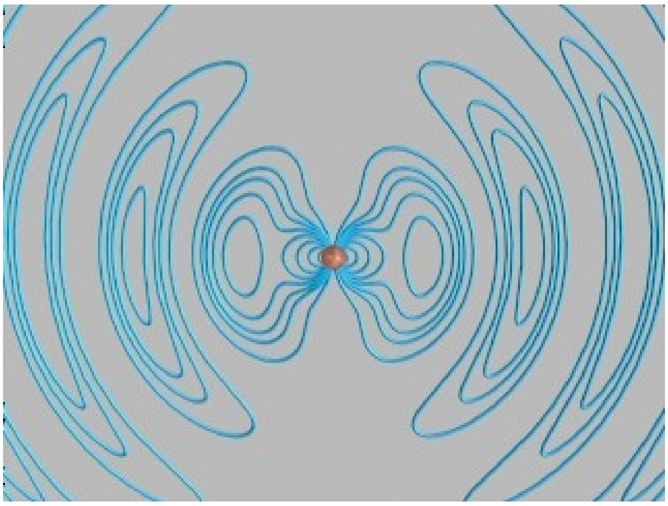
Im nichtrelativistischen Fall erhalten wir die Lösung, indem wir einfach β=0 ein-setzen (s. Letzte Vorlesung). Der Einfachheit halber befinde sich das Teichen im Koordinatenursprung und die Beschleunigung wirke in Richtung der z-Achse (**a** = c *d***β**/*dt* und der Einheitsvektor **r** verläuft entlang **n**). Dann gilt:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\left|\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{a})\right| = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\left|\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{a}\right|^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta.$$

Dieses Strahlungsmuster haben wir als Lamor-Formel kennengelernt.



Klassischerweise wird dies als Dipolstrahlung bezeichnet. Ein oszillierender Di-pol ist einfach ein periodisch beschleunigtes geladenes Teichen. Hertz hat als erster solche oszillierenden Ladungen als Quelle von elektromagnetischer Strahlung beschrieben (ca. 1886). Daher wird der Dipol auch Hertzscher Dipol genannt. Die Abbildung unten zeigt wie Strahlung senkrecht zur Bildebene durch „field reconnection” propagiert.



Wenn wir das Dipolmoment mit **p** bezeichnen, dann ist die Beschleunigung durch die doppelte Zeitableitung von **p** gegeben (Zur Erinnerung: **p** ist nur ein Vektor und besitzt daher die Dimension Länge). In diesem Fall erhalten wir die Formeln für das **E** und das **B** Feld für den Hertzschen Dipol:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{E1}} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}}{r}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{E1}} = -\hat{\mathbf{r}} \times c\mathbf{B}_{\mathrm{E1}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}) - \ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}}{r}.$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist:

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\mathrm{E1}} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}|\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}|^2.$$

$$P_{\mathrm{E1}}(t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}|\ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}|^2 \int d\Omega \sin^2\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c}|\ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{ret}}|^2.$$

In der Realität ist es viel einfacher den Strom in einer Schleife zu variieren, als Ladungen rauf und runter zu bewegen! Es sei daran erinnert, dass ein Kreisstrom nichts anderes als ein magnetischer Dipol ist. Also erzeugt ein solcher, zeitlich veränderlicher Strom magnetische Dipolstrahlung. Das ist das grundlegende Prinzip nahezu aller Übertragungsantennen.
Wenn ein Strom *$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$* in einem Kreisleiter mit Radius *b* oszilliert, dann kann der magnetische Dipol geschrieben werden als:

$$\mathbf{m}(t) = \pi b^2 I(t)\,\hat{\mathbf{z}} = m_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}},$$

$$m_0 \equiv \pi b^2 I_0$$

Ähnlich wie im elektrischen Fall können wir den Energiefluss mit Hilfe des Poynting Vektors bestimmen (dabei ist θ der Winkel zwischen **z** und der Messrichtung **r**):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c}\left\{\frac{m_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t - r/c)]\right\}^2 \hat{\mathbf{r}},$$

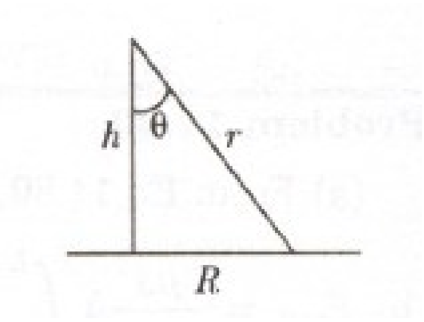
In der Realität messen wir die Intensität des, über viele Zyklen gemittelten, Energieflusses, also:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}},$$

Das ist dieselbe Winkelabhängigkeit, die wir bereits in der Lamor-Formel gefunden haben. Die emittierte Gesamtleistung kann durch mitteln über alle Winkel gefunden werden:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}.$$

Ein schönes Anwendungsbeispiel der obigen Formel ist die Messung der Strahlung (d.h. die Rate des Energieflusses, beschrieben durch **S**) einer beliebigen Antenne auf Bodenhöhe. Wenn der strahlende Dipol an einer Antenne mit Höhe *h* montiert ist und wir die Leistung vom Boden aus in Entfernung *R* zur Basis messen, dann zeigt eine einfache Rechnung, dass die gemessene Leistung maximal ist wenn *h* = *R* gilt. (Außerdem empfangen wir offensichtlich keine Leistung direkt unter der Antenne, wo θ = 0 ist.)



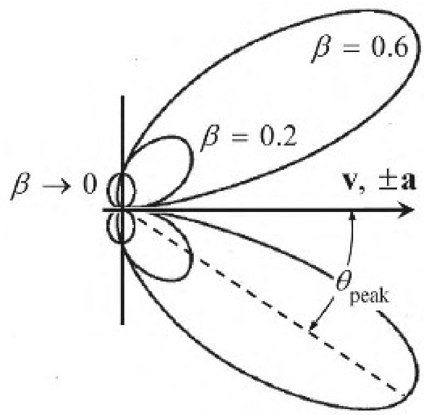
Zu Beispiel ist die maximale am Boden empfangende Leistung von einer FM Radioantenne mit einer Ausgangsleistung von 30 kW, welche auf einem 100 m hohen Turm montiert ist, ca. 9 μW/cm^2. Für eine leistungsschwache Mobilfunkantenne (P ~ 20 W) auf einem Hausdach (h ~ 5m) erhalten wir ungefähr 2.4 μW/cm^2 für *h* = *R.* Ist das mit den Sicherheitsrichtlinien vereinbar?

• Beschleunigung || Geschwindigkeit: Bremsstrahlung

Auf der Suche nach einem Ausdruck für die Strahlungsleistung im nichtrelativistischen Fall vereinfacht sich die Formel deutlich, wenn Beschleunigungsvektor **a** und Geschwindigkeitsvektor **v** parallel zueinander sind. Die Strahlung ist dann axialsymmetrisch zur Beschleunigungs-/Fortbewegungs-richtung und ist gegeben durch:

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\parallel} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}.$$

Die Abhängigkeit von a^2 zeigt, dass das Strahlungsmuster für Beschleunigung und Abbremsung identisch ist. Die emittierte Leistung ist Null bei $\theta = 0$ und die Keulen sind mit steigender Geschwindigkeit zunehmend nach vorne gerichtet.



Galaxienhaufen emittieren Bremsstrahlung im Röntgenbereich. Galaxienhaufen setzen sich zu großen Teilen aus einem heißen Plasma zusammen, welches eine typische Temperatur von einigen keV hat (1keV ≙ 10^7 K). Zum Vergleich: Die Ruhemasse eines Elektrons beträgt 511 keV/c^2. Daher ist selbst bei solchen Temperaturen β recht klein.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_{\text{tot}}}{m_0 c^2} = \frac{E_{\text{kin}} + m_0 c^2}{m_0 c^2}$$

Mit der obigen Formel kann man leicht sehen, dass

β ≈ 0 für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 eV (ca. 10^4 K)
β ≈ 0.06 für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 keV (ca. 10^7 K)
β ≈ 0.94 für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 MeV
β ≈ 0.9999999 für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 GeV

In manchen astrophysikalischen Objekten gibt es GeV Elektronen. Im diesem Fall ist $\beta \approx 1$, $\theta \approx 0$ und der Nenner des Ausdrucks für die Bremsstrahlung verschwindet fast. Wir können schreiben:

$$1-\beta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta} = \frac{1}{\gamma^2(1+\beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \qquad (\beta \approx 1)$$

$$1-\beta\cos\theta \approx \frac{1+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} \qquad (\beta \approx 1, \theta \ll 1).$$

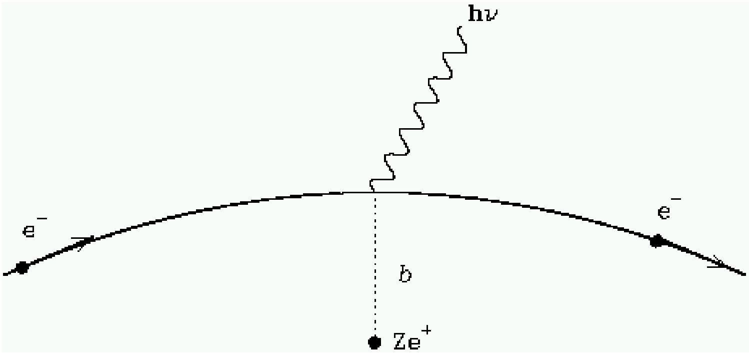
Womit wir einen Ausdruck für ultrarelativistische Bremsstrahlung erhalten.

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\parallel} \approx \frac{2\mu_0 q^2 a^2}{\pi^2 c} \frac{\gamma^8(\gamma\theta)^2}{[1+(\gamma\theta)^2]^5} \qquad (\gamma \gg 1, \theta \ll 1).$$

Indem wir das Maximum der obigen Relation in Abhängigkeit von $\gamma\theta$ bestimmen stellen wir fest, dass die Winkelverteilung für $\gamma >> 1$ von zwei intensiven γ^8 Peaks bei den Winkeln $\theta = \pm\,\theta_{peak} \approx \pm\, 1 / 2\gamma$ dominiert wird

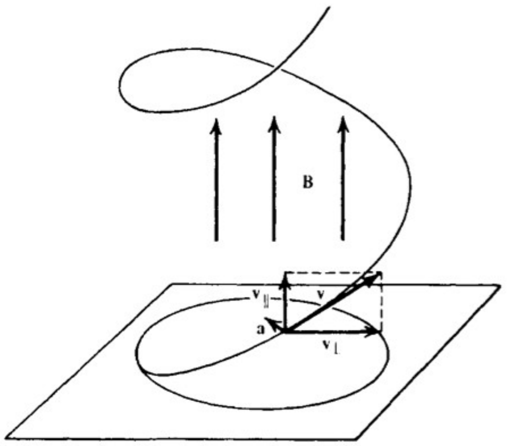
Beide Peaks haben eine Breite von $\Delta\theta \sim 1/\gamma$ (s. Abbildung).

In der Astrophysik liegt meist ein Elektron-Proton Plasma vor. Durch die hohe kinetische Energie der Elektronen ist die Abweichung der Bahn von einer geraden Linie bei der Streuung an einem Proton vernachlässigbar. Beim Vorbeiflug an einem Proton (oder einem anderen Ion) verringert sich jedoch die Geschwindigkeit des Elektrons ein wenig. Das plötzliche Abbremsen verursacht Bremsstrahlungsemission.



• Beschleunigung⊥ Geschwindigkeit: Zyklotron & Synchrotron Strahlung

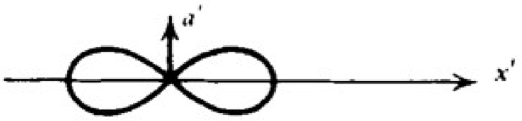
Im anderen Fall sind Beschleunigung und Geschwindigkeit senkrecht zueinander. Das passiert immer, wenn sich ein geladenes Teilchen durch ein Magnetfeld bewegt, da die Lorentzkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt. Dieser Fall ist besonders interessant für Teilchenphysiker und Astrophysiker!



Die Lösung ist schwieriger zu erhalten als im Fall der Bremsstrahlung, da es sowohl eine Abhängigkeit vom Polarwinkel θ, als auch vom Azimutwinkel φ gibt. Nicht-triviale Algebra liefert das Ergebnis:

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\perp} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right].$$

Der nichtrelativistische Grenzfall $\beta \approx 0$ ist bekannt als Synchrotronstrahlung. Sie hat die Winkelabhängigkeit $(1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi)$.



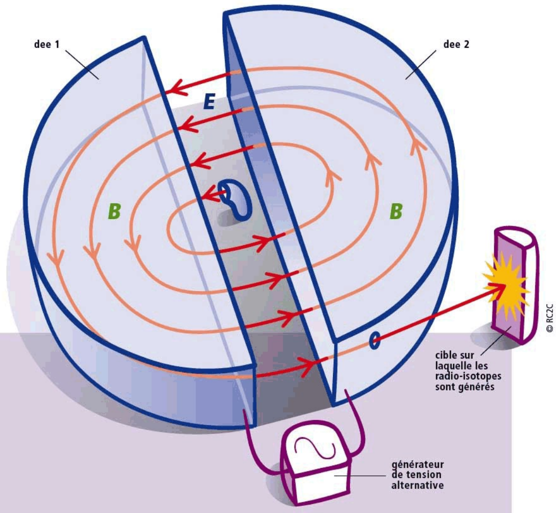


Abbildung: Ein Zyklotron, in dem sich Elektronen nahezu kreisförmigen Bahnen durch ein Magnetfeld bewegen. Die Energie wird den Elektronen über hochfrequente Wechselspannung zwischen den beiden Halbkreisen zugeführt. Zur Erinnerung: Es wird ein elektrisches Feld zum Erhöhen der kinetischen Energie benötigt.

Erneut ist der interessanteste Fall der ultrarelativistische Fall mit β≈1. Hier erfüllt die Winkelverteilung die folgende Gleichung:

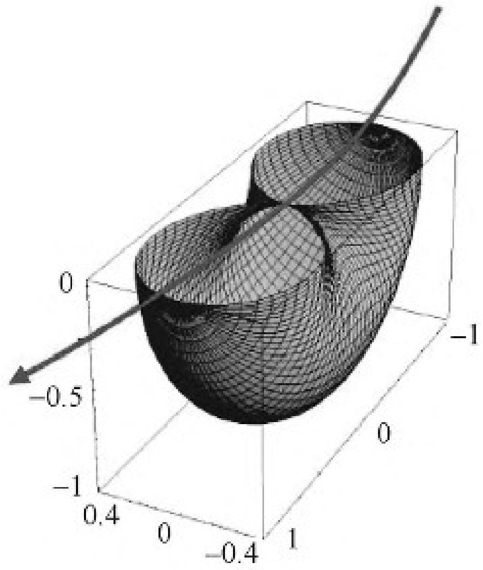
$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\perp} \approx \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{8\gamma^6}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\left[1-\frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\phi}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\right] \qquad (\gamma \gg 1).$$

Die emittierte Strahlung ist entlang eines schmalen Strahls mit einer Breite ~ 1/γ konzentriert und wird in Bewegungsrichtung abgegeben (d.h. Maximum bei θ = 0). Dieser Effekt wird auch relativistisches Beaming genannt. Das ist nichts anderes als der relativistische

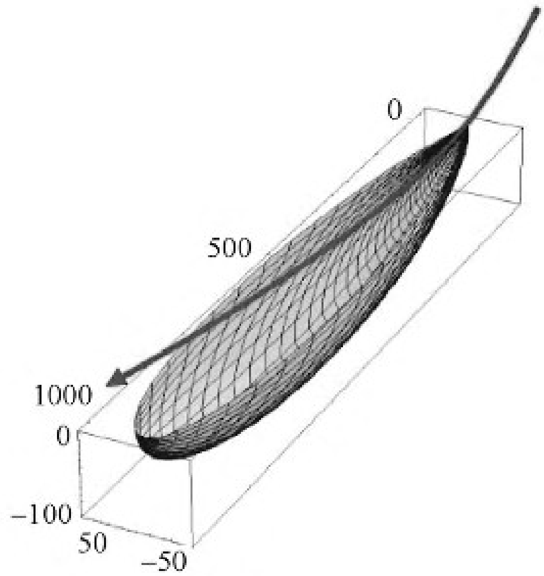
Dopplereffekt, bei dem der Lorentzfaktor den Anteil an vorwärtsgerichteter Strahlung erhöht und den Anteil der nach hinten gerichteten Strahlung reduziert.

Was außerdem Auffällt ist die starke γ ^{6} Abhängigkeit der abgestrahlten Leistung. Aus diesem Grund ist es nicht möglich Elektronen in einem Kreisbeschleuniger auf TeV Energien zu bringen. Die Strahlungsverluste werden einfach zu hoch! Für Elektronen würde man einen Linearbeschleuniger benötigen. Der LHC am CERN verwendet Protonen und Schwerionen, da die abgestrahlte Leistung umgekehrt proportional zur Masse ist. Dadurch können wir mit diesen Teilchen Energien im TeV Bereich erreichen.

In der Astrophysik trifft man fast täglich auf Synchrotronstrahlung! Sie kann in Supernova-Explosionen, Pulsaren, dem Zentren von Galaxien und in Galaxienhaufen beobachtet werden. Im letzten Fall erstreckt sich das Emissionsgebiet über viele Millionen Lichtjahre!



$\beta \approx 0$



$\beta = 0.9$